

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А.И. Запасный

ОСНОВЫ
ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



А.И. ЗАПАСНЫЙ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано УМО по образованию
в области связи в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по специальностям
200900 «Сети связи и системы коммутации»,
201000 «Многоканальные телекоммуникационные системы»,
201100 «Радиосвязь, радиовещание и телевидение»,
201200 «Средства связи с подвижными объектами»*

Москва
РИОР
2006

УДК 621.3.01(075.8)
ББК 31.27-01я73
330

Рецензенты:

зав. кафедрой «Теория электрических цепей»
Поволжской государственной академии телекоммуникаций
и информатики, доктор технических наук, профессор *А.Е. Дубинин*
зав. кафедрой ТОЭ Северо-Кавказского государственного
технического университета, доктор технических наук,
профессор *В.М. Кожевников*

330 **Запасный А.И. Основы теории цепей: Учебное пособие. — М.:
РИОР, 2006. — 336 с. — (Высшее образование).**

ISBN 5-369-00001-8

В пособии последовательно изложены программные темы дисциплины «Основы теории цепей», приведены основные законы и методы анализа и синтеза электрических цепей в стационарном и переходном режимах, характеристики и параметры линейных, нелинейных цепей и цепей с распределенными параметрами.

Для студентов, обучающихся по телекоммуникационным, радиотехническим и электротехническим специальностям и направлениям.

УДК 621.3.01(075.8)
ББК 31.27-01я73

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

- АВТ — аналоговая вычислительная техника
АЛЭЦ — активная линейная электрическая цепь
АНЭ — активный нелинейный элемент
АПЦ — апериодическая цепь
АС — аналоговый сигнал
АЧС — амплитудно-частотный спектр
АЦП — аналого-цифровой преобразователь
БИХ — бесконечная импульсная характеристика
БПФ — быстрое преобразование Фурье
ВАХ — вольт-амперная характеристика
ГВ — гармоническое воздействие
Д — дискретизатор
ДЛ — длинная линия
ДПФ — дискретные преобразования Фурье
ДС — дискретный сигнал
ДФ — дискретный фильтр
И — интегратор
ИИН — идеальный источник напряжения
ИИТ — идеальный источник тока
ИНУН — источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ — источник напряжения, управляемый током
ИОС — инвертор отрицательных сопротивлений
ИПС — инвертор положительных сопротивлений
ИС — инвертор сопротивлений
ИТУН — источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ — источник тока, управляемый током
ИФНЧ — идеальный фильтр нижних частот
ИЦ — избирательная цепь

КБВ	— коэффициент бегущих волн
КЗ	— короткое замыкание
КИХ	— конечная импульсная характеристика
КОС	— конвертор отрицательных сопротивлений
КПС	— конвертор положительных сопротивлений
КПФ	— комплексная передаточная функция
КС	— конвертор сопротивлений
КСП	— комплексная спектральная плотность
КСФ	— комплексная спектральная функция
КЧХ	— комплексная частотная характеристика
ЛЭП	— линия электропередачи
МКТ	— метод контурных токов
МУН	— метод узловых напряжений
МФЦ	— минимально-фазовая цепь
НЧ	— низкочастотное звено
НЭ	— нелинейный элемент
НЭЦ	— нелинейная электрическая цепь
ОКК	— одиночный колебательный контур
ООС	— отрицательная обратная связь
ОПФ	— операторная передаточная функция
ОПХ	— операторная передаточная характеристика
ОС	— обратная связь
ОУ	— операционный усилитель
ПЗ	— полоса задерживания
ПОС	— положительная обратная связь
ПП	— полоса пропускания
ПР	— полоса расфилтровки
ПРК	— параллельный колебательный контур
ПС	— преобразователь сопротивлений
ПСК	— последовательный колебательный контур

ПФ	— полосовой фильтр
РБВ	— режим бегущих волн
РИН	— реальный источник напряжения
РИТ	— реальный источник тока
РСВ	— режим стоячих волн
РСмВ	— режим смешанных волн
РФ	— режекторный фильтр
СКК	— связанные колебательные контуры
УФР	— условие физической реализуемости
ФВЧ	— фильтр верхних частот
ФК	— фазовый контур
ФНЧ	— фильтр нижних частот
ФСС	— фильтр сосредоточенной селекции
ФЧХ	— фазочастотная характеристика
ХХ	— холостой ход
ЦАП	— цифроаналоговый преобразователь
ЦПОС	— цифровой процессор обработки сигналов
ЦФ	— цифровой фильтр
ЧЗОС	— частотно-зависимая обратная связь
ЧП	— четырехполюсник
ЧХЗ	— частотная характеристика затухания
ЧХФ	— частотная характеристика фазы
ЭДС	— электродвижущая сила
ЭИН	— эквивалентный источник напряжения
ЭИТ	— эквивалентный источник тока
ЭФ	— электрический фильтр
ЭЦ	— электрическая цепь

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с наименованием дисциплины ее предметом являются электрические цепи, которые согласно ГОСТ 19880–74 определяются так:

«Электрическая цепь — совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об ЭДС, токе и напряжении».

Согласно этому определению электрическая цепь (ЭЦ), во-первых, должна иметь замкнутый путь для электрического тока и, во-вторых, должна описываться двумя основными понятиями: *ток* и *напряжение*, поскольку электродвижущая сила (ЭДС) — это также напряжение источника электрической энергии в режиме холостого хода, т.е. при отключенной нагрузке. Этому определению соответствуют такие устройства и объекты, как резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы, электро- и радиолампы, полупроводниковые и электронные приборы, электрические двигатели и генераторы, кабели связи и линии электропередачи и др. При этом электрическая цепь может состоять из отдельных (дискретных) компонентов или быть изготовленной в едином технологическом процессе, например, внутри кристалла полупроводника.

Различают две основные разновидности электрических цепей:

- *силовые, или цепи энергопередачи* — для производства, передачи, преобразования и использования электрической энергии;
- *сигнальные, или цепи электросвязи* — для формирования, преобразования, передачи и приема сигналов (материальных носителей информационных сообщений).

Для специалистов связи наибольший интерес представляют цепи электросвязи, а цепи энергопередачи представляют интерес в качестве источников электропитания устройств (цепей) электросвязи. Поэтому содержание

дисциплины «Основы теории цепей» включает вопросы анализа и синтеза цепей электросвязи и практически не затрагивает особенности цепей энергопередачи, которые рассматриваются в специальных дисциплинах.

Краткая история развития теории электрических цепей

К числу первых трудов по электричеству и магнетизму относятся сочинения лондонского королевского лейб-медика В. Гильберта (1600) и русского ученого М.В. Ломоносова (1745–1753).

Интенсивное развитие науки об электричестве начинается с работ итальянского врача и физика Л. Гальвано (1780), итальянского ученого А. Вольта (1800) и русского академика В.В. Петрова (1802), которые позволили создать *источники электрической энергии* (гальванические элементы, вольтовы столбы и т.п.) и на их базе продолжить исследования явлений электричества и магнетизма. Благодаря этому были открыты *основные закономерности электромагнитных явлений*:

- взаимодействие двух наэлектризованных тел (француз Ш. Кулон в 1785 г.);
- взаимосвязь тока и напряжения в цепи (В.В. Петров в 1802 г., немецкие физики Г. Ом в 1826 г. и Г. Кирхгоф в 1847 г.);
- магнитное действие электрического тока (датчанин Г. Эрстед и французы Ж. Бис и Ф. Савар в 1820 г.);
- силовое (физическое) взаимодействие проводов с электрическим током (француз А. Ампер в 1826 г.);
- индукция и самоиндукция электрического поля переменным магнитным полем (англичанин М. Фарадей и американец Д. Генри в 1831 г.);
- тепловое действие электрического тока (русский физик Э. Ленц и англичанин Д. Джоуль в 1841 г.);
- теория поля и явление распространения электромагнитных волн (Д. Максвелл в 1864 г.) и др.

Формируются *основные понятия теории электрических цепей* (ток, напряжение, ЭДС, сопротивление, индуктивность, емкость) и *основные законы* (первый и второй

законы Кирхгофа, закон Ома). На базе этих открытий создаются технические устройства и системы:

1826—1830 гг. — электромагниты американца Д. Генри;

1832—1844 гг. — электромагнитный телеграф русского ученого П.Л. Шиллинга и американца С. Морзе;

1834—1842 гг. — электрический двигатель и электрический генератор русского академика Б.С. Якоби;

1850 г. — буквопечатающий телеграф Б.С. Якоби.

С трудов английского ученого Д. Максвелла (1850) началось создание *теории электромагнитного поля и цепей переменного тока*, зарождение радиотехники и вакуумной электроники. В этот период стремительно развивается практическая электротехника:

1875—1876 гг. — создание электрической свечи русским ученым П.Н. Яблочковым (начало электрического освещения) и изобретение телефонной связи американцем А. Беллом;

1887—1895 гг. — экспериментальное подтверждение немецким физиком Г. Герцем гипотезы Д. Максвелла о возможности излучения электромагнитных волн и практическое использование этого явления для радиосвязи русским физиком А.С. Поповым;

1888—1891 гг. — решение проблемы передачи электрической энергии на большие расстояния с помощью трехфазной системы электропередачи русского инженера М.О. Доливо-Добровольского, которая используется и сейчас практически без принципиальных изменений.

В период 1900—1950 гг. начинается становление радиотехники (1915 г. — изобретение электрического фильтра, 1927 г. — изобретение усилителя с обратной связью, 1933 г. — доказана фундаментальная для электросвязи теорема Котельникова, 1938 г. — изобретение операционного усилителя, 1948 г. — изобретение искусственной индуктивности — гиратора и др.). В этот период происходит создание *теории цепей электросвязи и теории дискретных автоматов*, положивших начало созданию электронно-вычислительной техники и полупроводниковой электроники, создаются *теория активных электрических цепей и теория синтеза электрических цепей*, что

способствует появлению радиолокации, радионавигации, радиовещания, телевидения и других новых областей применения радиотехники.

Взаимодействие теории электрических цепей и потребностей практики обогащало теорию и позволяло создавать все новые технические средства на базе новейших достижений фундаментальной теории электро- и радиотехники, электросвязи и вычислительной техники. К концу этого периода создаются первые образцы аналоговых и цифровых вычислительных машин.

С 1950 г. начинается становление полупроводниковой и микроэлектронной техники, внедрение автоматических и автоматизированных систем управления, совершенствование *теории передачи информации* и *теории автоматического регулирования*. Наука становится непосредственной производительной силой. Создается микроэлектронная промышленность — основа современной революции во всех сферах деятельности человека за счет широкой компьютеризации и развития систем телекоммуникации.

В перспективе — использование оптоэлектронных, магнитооптических, криогенных и других объектов электрических цепей, базирующихся на новейших достижениях физики, радио- и микроэлектроники.

Виды электрических цепей

В общем случае электрические цепи могут содержать источники электрической энергии (*активные ЭЦ*) или не содержать эти источники (*пассивные ЭЦ*). При анализе свойств ЭЦ к ним подключаются источники измерительных сигналов, т.е. сигналов с известной формой и параметрами.

Свойства ЭЦ определяются свойствами входящих в нее объектов и устройств, которые характеризуются следующими **основными параметрами**:

- **электрическое сопротивление** R , измеряемое в омах (Ом), или **электрическая проводимость** $G = 1/R$, измеряемая в сименсах (См);
- **электрическая емкость** C , измеряемая в фарадах (Ф);
- **индуктивность** L , измеряемая в генри (Гн).

Различают следующие электрические цепи:

- **линейные** — основные параметры всех объектов и устройств ЭЦ не зависят от величины тока или напряжения в них;
- **нелинейные** — основные параметры хотя бы одного объекта (устройства) ЭЦ зависят от величины тока или напряжения в нем;
- **параметрические** — основные параметры хотя бы одного объекта (устройства) ЭЦ зависят от времени. Параметрические ЭЦ могут быть линейными и нелинейными.

Большинство ЭЦ являются **ЭЦ с сосредоточенными параметрами**, поскольку их основные параметры «сосредоточены» в пределах входящих в них объектов и устройств и не зависят от места их подключения в цепи (пространственных координат). Теория ЭЦ разработана применительно именно к ЭЦ с сосредоточенными параметрами.

Однако имеются ЭЦ, основные параметры которых «распределены» вдоль одной или нескольких пространственных координат, например: линии связи, антенны, фидерные линии, волноводы, объемные резонаторы и т.п. Распределение основных параметров ЭЦ связано с соизмеримостью геометрических размеров ЭЦ с длиной волны используемых в ней сигналов (воздействий), что создает различные значения напряжений в различных сечениях ЭЦ с параллельными элементами и токов в различных сечениях ЭЦ с последовательными элементами, т.е. различные сечения ЭЦ имеют различные основные параметры. Например, в линии связи (воздушной, кабельной) параметры распределены вдоль ее длины. Такие ЭЦ называют **ЭЦ с распределенными параметрами**, и для их анализа разработана особая теория.

Первичные понятия электрических цепей

Согласно определению электрической цепи ее первичными понятиями являются **ток** и **напряжение**, представляющие собой скалярные (вещественные положительные или отрицательные) величины.

Значения напряжения (тока) в любой заданный момент времени называют *мгновенными значениями*, они являются функциями времени и обозначаются строчными буквами: $u = u(t)$ и $i = i(t)$.

Мгновенное значение тока равно скорости изменения заряда, измеряемого в кулонах (Кл), и измеряется в амперах (А):

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (\text{В.1})$$

За положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов, т.е. от «плюса» источника к его «минусу».

Мгновенное значение напряжения равно значению электрической энергии, затраченной на перемещение единицы электрического заряда, и измеряется в вольтах (В):

$$u = \frac{dw}{dq}. \quad (\text{В.2})$$

За положительное направление напряжения принято направление, совпадающее с направлением тока.

Электрическое напряжение определяется также как *разность потенциалов* двух точек (зажимов, полюсов) ЭЦ:

$$u = v_1 - v_2,$$

где v_1, v_2 — потенциалы точек 1 и 2 соответственно, причем напряжение положительно, если $v_1 > v_2$.

Потенциал некоторой точки ЭЦ — это отношение потенциальной энергии заряда к величине этого заряда, т.е. $v = w/q$.

Напряжение участка цепи, по которой протекает электрический ток, иногда называют *падением напряжения*.

Из (В.2) следует, что *мгновенное значение электрической энергии*, измеряемое в джоулях (Дж), ватт-секундах (Вт·с), вольт-ампер-секундах (В·А·с), с учетом (В.1) определяется выражением

$$w = \int_0^q u dq = \int_0^t u i dt.$$

Скорость изменения мгновенной электрической энергии называют *мгновенной электрической мощностью* и измеряют в джоулях в секунду (Дж/с), ваттах (Вт), вольт-амперах (ВА):

$$p = \frac{dw}{dt} = ui. \quad (\text{В.3})$$

Поскольку мгновенные значения напряжения u и тока i могут быть как положительными, так и отрицательными, то мгновенная мощность p также может быть положительной, что означает увеличение (потребление) электрической энергии в ЭЦ, или отрицательной, что означает убывание (отдачу) электрической энергии из ЭЦ.

Изучение свойств (характеристик и параметров) электрических цепей осуществляется *методами анализа* — определение реакции (отклика) ЭЦ с известной структурой и параметрами на априори известные воздействия, называемые измерительными сигналами.

Реализация электрических цепей с заданными свойствами осуществляется *методами синтеза* — определение структуры (топологии) и параметров ЭЦ при заданных воздействиях и откликах на них, т.е. при заданных свойствах цепи.

Задача синтеза сложнее задачи анализа, поскольку ее решение неоднозначно: заданные свойства цепи могут быть реализованы множеством различных структур и параметров. Например, частотная характеристика (рис. В.1) низкочастотной ЭЦ $H(f)$ с параметром f_r может быть реализована RC -цепью с бесконечным набором значений R и C .

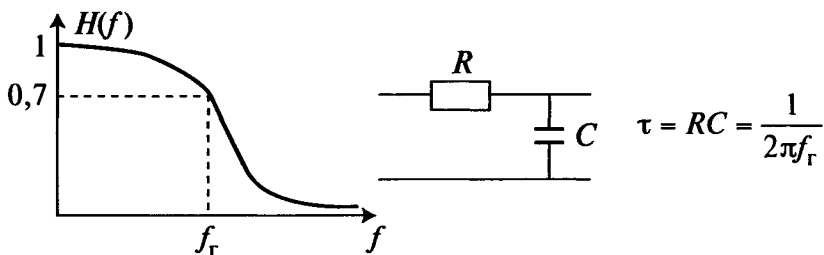


Рис. В.1

В теории электрических цепей для оценки основных величин и параметров используется Международная система единиц (СИ). Для образования десятичных приставок и дольных единиц используются наименования, приведенные в таблице.

Множитель	Приставка	Обозначение	Наименование
10^{18}	экса	Э (E)	Квинтиллион
10^{15}	пета	П (P)	Квадриллион
10^{12}	тера	Т (T)	Триллион
10^9	гига	Г (G)	Миллиард
10^6	мега	М (M)	Миллион
10^3	кило	к (k)	Тысяча
10^2	гекто	г (h)	Сто
10	дека	Да (da)	Десять
10^{-1}	деци	д (d)	Одна десятая
10^{-2}	санتي	с (c)	Одна сотая
10^{-3}	милли	м (m)	Одна тысячная
10^{-6}	микро	мк (μ)	Одна миллионная
10^{-9}	нано	н (n)	Одна миллиардная
10^{-12}	пико	п (p)	Одна триллионная
10^{-15}	фемто	ф (f)	Одна квадриллионная
10^{-18}	атто	а (a)	Одна квинтиллионная

Тема 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Компоненты и элементы электрических цепей

1.1.1. Идеализированные элементы электрических цепей

Объекты и устройства электрической цепи, назовем их **компонентами**, делят на *функциональные* (источники, потребители, преобразователи и др.) и *конструктивные* (резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, трансформаторы, диоды, транзисторы, электро- и радиолампы, источники питания и другие приборы элементной базы радиоэлектронной аппаратуры и электротехники).

Все п а с с и в н ы е компоненты электрической цепи характеризуются набором основных параметров (R , L , C), которые либо сосредоточены в ограниченных пределах, либо распределены вдоль пространственных координат.

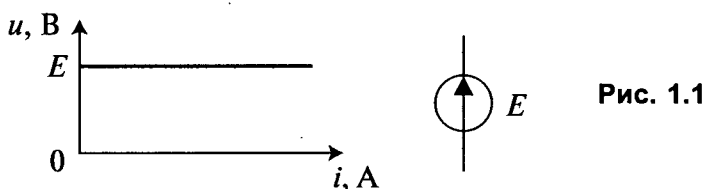
А к т и в н ы е компоненты (источники) характеризуются величиной ЭДС — напряжения холостого хода ($XХ$, т.е. без нагрузки) или величиной тока короткого замыкания ($КЗ$, т.е. с бесконечно большой нагрузкой), а также величиной внутреннего сопротивления (проводимости).

Для удобства анализа электрических цепей с сосредоточенными параметрами полагают, что все компоненты состоят из определенного набора **идеализированных элементов** (каждый из которых обладает только одним основным параметром), соединенных **идеальными проводниками**, для которых основные параметры $R = L = C = 0$.

Различают следующие пять видов идеализированных элементов (два активных и три пассивных):

- идеальный источник напряжения (ИИН);
- идеальный источник тока (ИИТ);
- резистивный элемент;
- индуктивный элемент;
- емкостный элемент.

1. **Идеальный источник напряжения** создает ЭДС E (В), величина которой не зависит от подключенной к нему нагрузки (величины протекающего через него тока). Вольт-амперная характеристика (ВАХ) и условно-графическое изображение ИИН приведены на рис. 1.1.

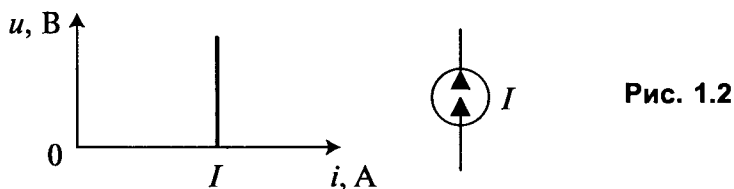


Поскольку ИИН при КЗ допускает бесконечно большой ток i при постоянной ЭДС, то ИИН обладает бесконечно большой мгновенной мощностью, что является его идеализацией. Внутреннее сопротивление ИИН

$$R_i = \frac{du}{di} = \frac{0}{di} = 0 \text{ (Ом)},$$

т.е. ИИН в электрической цепи представляет собой *короткое замыкание*.

2. **Идеальный источник тока** создает ток I (А), величина которого не зависит от подключенной к нему нагрузки (величины напряжения на нем). Вольт-амперная характеристика и условно-графическое изображение ИИТ приведены на рис. 1.2.



Поскольку ИИТ при ХХ допускает бесконечно большое напряжение u , то ИИТ обладает бесконечно большой мгновенной мощностью. Внутреннее сопротивление ИИТ

$$R_i = \frac{du}{di} = \frac{du}{0} = \infty \text{ (Ом)},$$

т.е. ИИТ в электрической цепи представляет собой *разрыв цепи*.

Реальные источники напряжения (РИН) и тока (РИТ) отличаются от идеальных (ИИН и ИИТ) наличием конечного внутреннего сопротивления $R_i \neq 0$, которое подключается последовательно к ИИН (рис. 1.3, а) и параллельно к ИИТ (рис. 1.3, б).

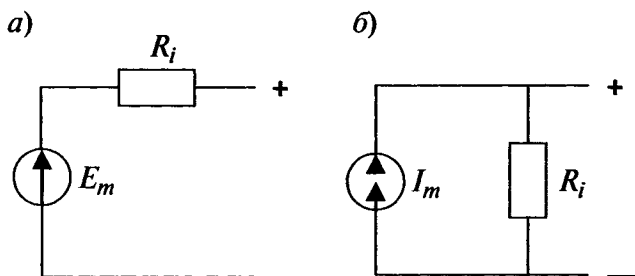


Рис. 1.3

3. Резистивный элемент обладает способностью только поглощать электрическую энергию, преобразуя ее в другие виды энергии (тепловую, световую, механическую и др.). Он может быть *линейным* (с линейной ВАХ) и *нелинейным* (с нелинейной ВАХ). Вольт-амперная характеристика и условно-графическое изображение резистивного элемента приведены на рис. 1.4.

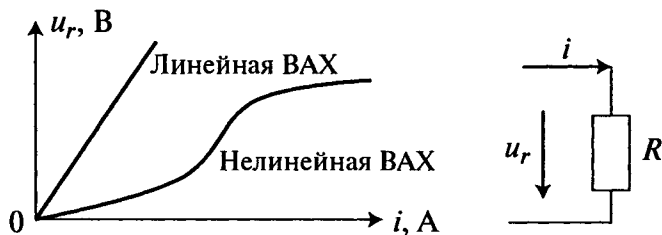


Рис. 1.4

Основной параметр резистивного элемента — *электрическое сопротивление* R , измеряемое в омах (Ом):

$$R = \frac{du_r}{di} \approx \frac{u_r}{i}. \quad (1.1)$$

Величина, обратная электрическому сопротивлению, называется *электрической проводимостью*: $G = 1/R$, измеряется в сименсах (См). Для резистивного элемента всегда $R > 0$ и $G > 0$, т.е. направления тока и напряжения на резистивном элементе всегда совпадают.

Мгновенная мощность резистивного элемента конечна и определяется согласно (В.3) и с учетом (1.1):

$$p_r = u_r i = R i i = R i^2, \quad (1.2)$$

т.е. всегда $p_r > 0$.

4. **Индуктивный элемент** обладает способностью только **накапливать** электрическую энергию в магнитном поле. Он также может быть *линейным* (с линейной вебер-амперной характеристикой) и *нелинейным* (с нелинейной вебер-амперной характеристикой). Условно-графическое изображение индуктивного элемента приведено на рис. 1.5.

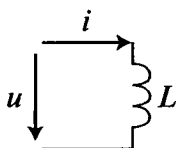


Рис. 1.5

Основной параметр индуктивного элемента — *индуктивность самоиндукции* L , измеряемая в генри (Гн) и равная положительной величине:

$$L = w \frac{d\Phi}{di} \approx w \frac{\Phi}{i}, \quad (1.3)$$

где w — число витков катушки индуктивности; Φ — магнитный поток самоиндукции, измеряемый в веберах (Вб).

Произведение $w \Phi$ называют *потокосцеплением*.

Согласно закону Фарадея — Максвелла ЭДС самоиндукции в катушке индуктивности

$$e_l = -u_l = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{di} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

Следовательно,

$$u_l = L \frac{di}{dt}, \quad (1.4)$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_l dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_l dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_l dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_l dt, \quad (1.5)$$

где $i(0)$ — начальное значение тока в индуктивном элементе, протекавшего до начала анализа процессов в нем (предыстория процесса).

Мгновенная мощность индуктивного элемента конечна и определяется согласно (В.3) и с учетом (1.4):

$$p_l = u_l i = L i \frac{di}{dt}, \quad (1.6)$$

т.е. в зависимости от направления тока мгновенная мощность может быть положительной (электрическая энергия запасается в магнитном поле) или отрицательной (электрическая энергия отдается из магнитного поля во внешнюю цепь).

Тогда величина запасаемой электрической энергии в индуктивном элементе

$$W_l = \int_{-\infty}^t p_l dt = \frac{L i^2}{2}. \quad (1.7)$$

5. **Емкостный элемент** обладает способностью только накапливать электрическую энергию в электрическом поле. Он также может быть *линейным* (с линейной кулон-вольтной характеристикой) и *нелинейным* (с нелинейной кулон-вольтной характеристикой). Условно-графическое изображение емкостного элемента приведено на рис. 1.6.

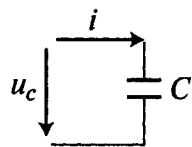


Рис. 1.6

Основной параметр емкостного элемента — *электрическая емкость* C , измеряемая в фарадах (Φ) и равная положительной величине:

$$C = \frac{dq}{du_c} \approx \frac{q}{u_c}, \quad (1.8)$$

где q — величина электрического заряда, накапливаемого в емкостном элементе; u_c — напряжение на емкостном элементе.

Ток через емкостный элемент определяется согласно (В.1) и с учетом (1.8):

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}. \quad (1.9)$$

Тогда напряжение

$$u_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (1.10)$$

Мгновенная мощность емкостного элемента конечна и определяется согласно (В.3) и с учетом (1.9):

$$p_c = u_c i = C u_c \frac{du_c}{dt}, \quad (1.11)$$

т.е. в зависимости от знака напряжения u_c мгновенная мощность может быть положительной (электрическая энергия накапливается в электрическом поле) или отрицательной (электрическая энергия отдается из электрического поля во внешнюю цепь).

Тогда величина запасаемой электрической энергии в емкостном элементе

$$W_c = \int_{-\infty}^t p_c dt = \frac{C u_c^2}{2}. \quad (1.12)$$

Подобие формул (1.4) и (1.9), (1.5) и (1.10), (1.6) и (1.11), (1.7) и (1.12) объясняется особым свойством индуктивного и емкостного элементов — так называемой *дуальностью* (двойственностью). Способность запасать и отдавать электрическую энергию полностью (без потерь) свидетельствует об их реактивных (возвращающих) свойствах.

1.1.2. Модель и топология электрической цепи, их формализация

Введение понятия «идеализированные элементы» позволяет при анализе реальной электрической цепи приближенно заменить ее некоторой моделью из совокупности идеализированных элементов, соединенных идеальными проводниками.

Система уравнений, описывающих свойства такой модели, есть *математическая модель* электрической цепи.

Условно-графическое изображение модели электрической цепи называют ее *схемой замещения*, которая состоит из взаимосвязанных схем замещения реальных компонентов цепи. Схемы замещения реальных компонентов электрической цепи могут быть различными в зависимости от условий использования, вида применяемых для анализа воздействий и т.п. Например, реальная катушка индуктивности при использовании низкочастотных воздействий более точно аппроксимируется схемой последовательного соединения элементов L и R и параллельно им емкостью C , а при использовании высокочастотных воздействий — схемой параллельного соединения L и C и последовательно им R .

Разнообразие компонентов электрической цепи и их схем замещения порождает большое разнообразие схем замещения электрических цепей.

В общем виде структура (топология) схемы замещения ЭЦ может описываться **графом**, в котором выделяют следующие основные понятия:

- **ветвь** — участок ЭЦ с одним и тем же током;
- **узел** — точка (место, зажим) соединения нескольких ветвей;
- **контур** — замкнутый путь из ветвей и узлов.

Например, в схеме замещения ЭЦ, приведенной на рис. 1.7, имеется семь ветвей (1-2, 1-3, 2-3, 1-4, 2-4, 3-4 через L_2 и 3-4 через R_2), четыре узла (1, 2, 3, 4) и 11 контуров.

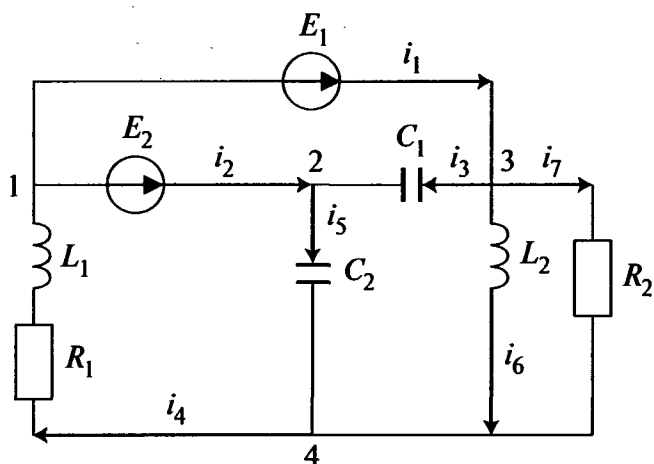


Рис. 1.7

Если в схеме замещения указаны (произвольно) направления токов в ветвях, то ее граф называют *ориентированным*. Ориентированный граф может быть формально описан (формализован) с помощью **матрицы соединений**, состоящей из q строк (по числу узлов) и p столбцов (по числу ветвей), причем на пересечении i -й строки и j -го столбца стоят:

- +1, если ток втекает в i -й узел по j -й ветви;
- 1, если ток вытекает из i -го узла по j -й ветви;
- 0, если к i -му узлу j -я ветвь не подсоединена.

Например, для схемы замещения на рис. 1.7 матрица соединений имеет вид (номер ветви соответствует номеру тока в ней)

$$M_{4 \times 7} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Такая матрица состоит из q строк и p столбцов и содержит линейно зависимые строки: сумма элементов любого столбца равна 0, т.е. любая строка является излишней, поскольку может быть получена путем линейной комбинации других строк, например суммированием остальных строк.

Следовательно, число независимых строк (независимых узлов) в любой схеме замещения равно $m = q - 1$.

Исключив одну из строк, например 4-ю, получим **редуцированную матрицу соединений**, которая для приведенной схемы замещения примет вид

$$M_{3 \times 7} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из теории графов известно, что число независимых (отличающихся хотя бы одним элементом) контуров в графе, состоящем из p ветвей и m независимых узлов, равно разности $n = p - m$.

Для нашей схемы, где $p = 7$ и $q = 4$: $m = 4 - 1 = 3$ и $n = 7 - 3 = 4$.

1.2. Основные законы и эквивалентные преобразования электрических цепей

1.2.1. Законы Кирхгофа и Ома в электрических цепях

К основным законам теории электрических цепей относятся первый и второй законы Кирхгофа и закон Ома. На базе этих законов построены все методы анализа и синтеза электрических цепей.

Первый закон Кирхгофа: *Алгебраическая (с учетом знаков) сумма токов для любого узла равна нулю*, т.е. сколько тока «втекает» в узел по одним ветвям (эти токи берутся со знаком «+»), столько из него «вытекает» по другим ветвям (эти токи берутся со знаком «-»).

Второй закон Кирхгофа: *Алгебраическая сумма падений напряжений на элементах в любом контуре равна нулю*, т.е. алгебраическая сумма ЭДС в контуре равна алгебраической сумме падений напряжений на пассивных

элементах этого контура. При суммировании ЭДС и падения напряжения берутся со знаком «+», если их направления совпадают с произвольно выбранным направлением обхода контура, и со знаком «-» в противном случае.

Законы Кирхгофа являются следствием всеобщего закона сохранения энергии. На их базе строятся уравнения электрического равновесия в электрических цепях, используемые в различных методах анализа и расчета электрических цепей.

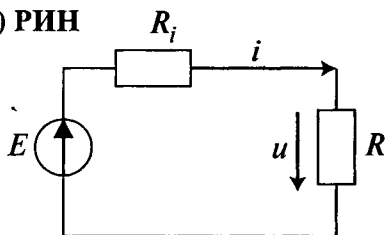
Закон Ома (известен из школьного курса физики) получен опытным путем для постоянного тока. Он устанавливает взаимосвязь тока, напряжения и сопротивления (проводимости) для любого элемента электрической цепи. Например, для мгновенных значений тока и напряжения на резистивном элементе закон Ома имеет вид

$$i = \frac{u}{R} = uG. \quad (1.13)$$

Направление тока заранее неизвестно и поэтому на схемах замещения выбирается произвольно.

Рассмотрим резистивную электрическую цепь с реальными источниками напряжения и тока (рис. 1.8).

а) РИН



б) РИТ

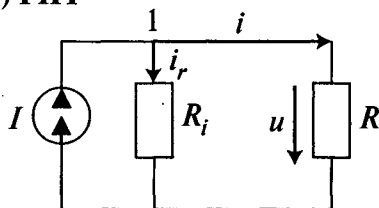


Рис. 1.8

В этом случае закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения примет следующий вид.

По второму закону Кирхгофа для контура (см. рис. 1.8, а)

$$E = u + iR_i.$$

По первому закону Кирхгофа для узла 1 (см. рис. 1.8, б)

$$I = i + i_r = i + \frac{u}{R_i}.$$

Тогда

$$i = \frac{E - u}{R_i}.$$

Тогда

$$i = I - \frac{u}{R_i}. \quad (1.14; 1.15)$$

По закону Ома $i = \frac{u}{R}$. Сравнивая правые части выражений для тока, получим:

$$u = \frac{ER}{R_i + R},$$

$$u = \frac{IR_i R}{R_i + R}. \quad (1.16; 1.17)$$

По выражениям (1.14) и (1.15) построим графики ВАХ для РИН (рис. 1.9, а) и РИТ (рис. 1.9, б).

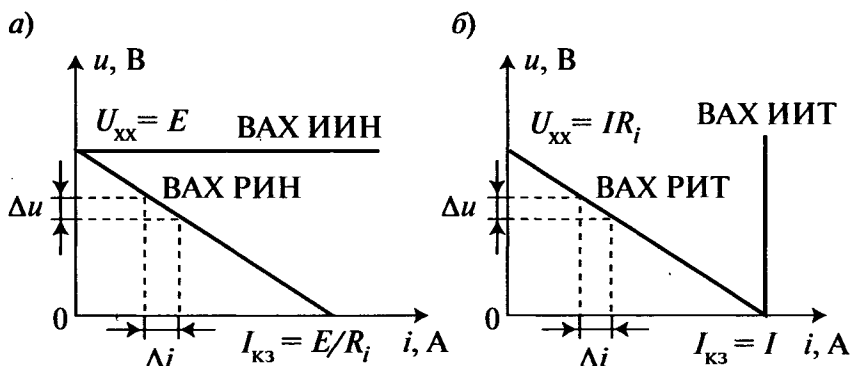


Рис. 1.9

На этих графиках обозначены:

- **напряжение холостого хода** U_{xx} при $i = 0$, т.е. при отсутствии нагрузки $R_H = \infty$;
- **ток короткого замыкания** $I_{кз}$ при $u = 0$, т.е. при коротком замыкании нагрузки $R_H = 0$.

Из графиков следует, что внутреннее сопротивление реальных источников напряжения и тока

$$R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{U_{xx}}{I_{кз}}. \quad (1.18)$$

1.2.2. Правила делителя напряжения и делителя тока

Из выражений (1.16) и (1.17) получим удобные для практического использования при расчетах цепей правила делителя напряжения и делителя тока. Для упрощения рассмотрим резистивные цепи.

Правило делителя напряжения: *Отношение напряжений на элементах последовательной цепи равно отношению сопротивлений этих элементов.*

Из (1.16) следует:

$$\frac{u}{E} = \frac{R}{R_i + R}. \quad (1.19)$$

Например, для цепи, приведенной на рис. 1.10, по правилу делителя напряжения получим такие выражения для напряжений на ее элементах:

$$u_1 = \frac{ER_1}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad u_2 = \frac{ER_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad u_3 = \frac{ER_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

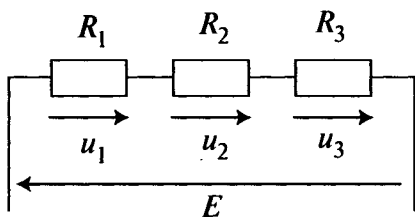


Рис. 1.10

Напряжение на любом элементе последовательной цепи равно произведению напряжения, приложенного к этой цепи, на сопротивление элемента, деленное на общее сопротивление, равное сумме сопротивлений последо-

вательно соединенных элементов, т.е. $R_0 = R_1 + R_2 + R_3$.

Правило делителя тока: *Отношение токов в параллельных ветвях равно отношению проводимостей этих ветвей.*

Например, для двух ветвей (рис. 1.11)

$$\frac{i}{i_r} = \frac{u/R}{u/R_i} = \frac{1/R}{1/R_i} = \frac{G}{G_i}.$$

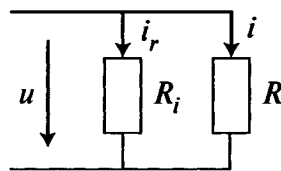


Рис. 1.11

Из (1.17) следует:

$$\frac{u}{R} = i = \frac{IR_i}{R_i + R}; \quad \frac{u}{R_i} = i_r = \frac{IR}{R_i + R}. \quad (1.20)$$

Ток в одной из двух параллельных ветвей равен произведению тока, пришедшего к узлу разветвления этих ветвей, на сопротивление противоположной ветви, деленное на сумму сопротивлений этих ветвей.

1.2.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей

Для удобства анализа активной линейной электрической цепи (АЛЭЦ) часто применяют эквивалентные преобразования ее топологии.

Условие эквивалентности преобразования одной АЛЭЦ в другую: сохранение неизменными токов и напряжений (для пассивных ЭЦ — сопротивлений и проводимостей) в точках преобразования. Используются следующие эквивалентные преобразования:

1. Преобразование РИН в РИТ и наоборот (рис. 1.12).

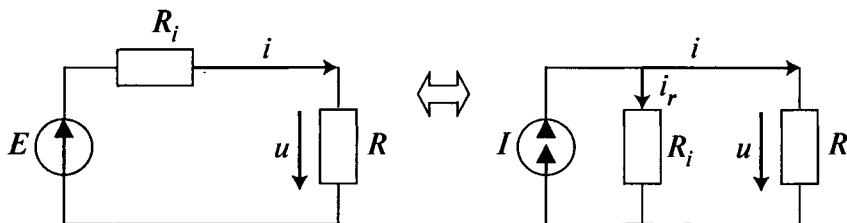


Рис. 1.12

Ток нагрузки в схеме с источником напряжения

$$i = \frac{E}{R_i + R}.$$

Ток нагрузки в схеме с источником тока

$$i = \frac{IR_i}{R_i + R}.$$

Из условия эквивалентности преобразования:

$$E = IR_i. \quad (1.21)$$

Идеальные источники напряжения и тока не взаимозаменяемы.

2. Замена нескольких последовательно соединенных сопротивлений одним эквивалентным. Элементы электрической цепи соединены последовательно, если через них протекает один и тот же электрический ток (рис. 1.13).

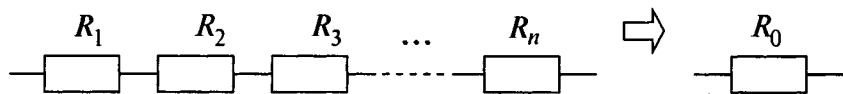


Рис. 1.13

При последовательном соединении элементов электрической цепи их сопротивления складываются:

$$R_0 = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n. \quad (1.22)$$

3. Замена нескольких параллельно соединенных проводимостей одной эквивалентной (рис. 1.14). Элементы электрической цепи соединены параллельно, если к ним приложено одно и то же электрическое напряжение.

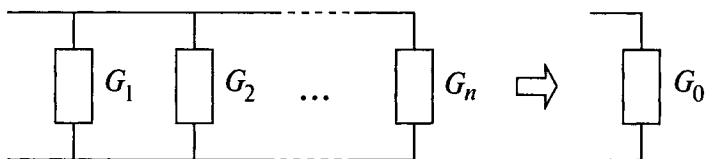


Рис. 1.14

При параллельном соединении элементов электрической цепи их проводимости складываются:

$$G_0 = G_1 + G_2 + \dots + G_n; \quad R_0 = 1/G_0. \quad (1.23)$$

4. Замена нескольких последовательно соединенных РИН одним эквивалентным (рис. 1.15).

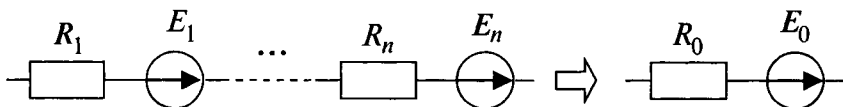


Рис. 1.15

При последовательном соединении РИН их ЭДС (с учетом направлений) складываются и внутренние сопротивления складываются:

$$E_0 = E_1 + \dots + E_n; \quad R_0 = R_1 + \dots + R_n.$$

5. Замена нескольких параллельно соединенных РИТ одним эквивалентным (рис. 1.16).

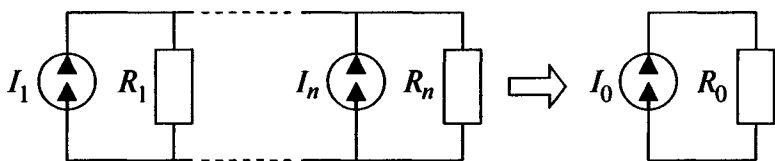


Рис. 1.16

При параллельном соединении РИТ их токи (с учетом направлений) складываются и внутренние проводимости складываются:

$$I_0 = I_1 + \dots + I_n; \quad 1/R_0 = 1/R_1 + \dots + 1/R_n.$$

6. Замена нескольких параллельно соединенных РИН одним эквивалентным РИТ (РИН предварительно преобразуются в РИТ и далее используется преобразование 5).

7. Замена нескольких последовательно соединенных РИТ одним эквивалентным РИН (РИТ предварительно преобразуются в РИН и далее используется преобразование 4).

8. Преобразование цепи вида «звезда» в цепь вида «треугольник» и наоборот (рис. 1.17):

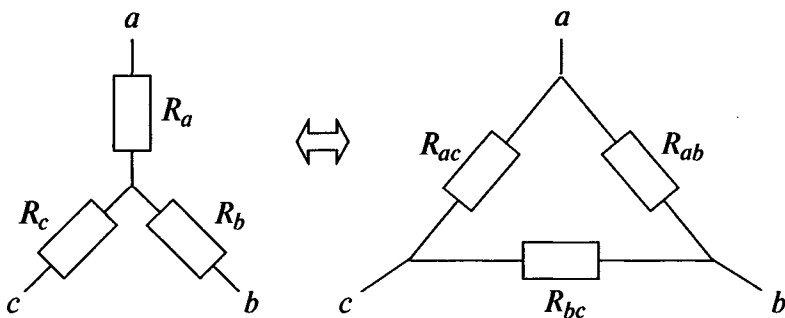


Рис. 1.17

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab} R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}}; & R_{ab} &= R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}; \\ R_b &= \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}}; & R_{bc} &= R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a}; \\ R_c &= \frac{R_{bc} R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}}; & R_{ac} &= R_a + R_c + \frac{R_a R_c}{R_b}. \end{aligned} \right\} (1.24)$$

1.3. Методы анализа линейных электрических цепей

Для простейших (с небольшим числом ветвей) линейных электрических цепей широко используются два метода анализа (расчета токов в ветвях): метод наложения и метод эквивалентного источника.

1.3.1. Метод наложения

Метод наложения базируется на справедливом только в линейных ЭЦ **принципе суперпозиции**: *в линейной ЭЦ отклик (реакция) на сумму воздействий равен сумме откликов (реакций) на каждое из воздействий.*

При использовании в активных линейных ЭЦ (АЛЭЦ) в качестве воздействий **источников напряжения** и **тока**, а в качестве отклика — **тока (напряжения)** в одной из ветвей **метод наложения** может быть сформулирован следующим образом:

Ток (напряжение) в i -й ветви АЛЭЦ равен алгебраической сумме токов (напряжений) в этой ветви, создаваемых каждым источником в отдельности при условии, что все остальные источники заменены своими внутренними сопротивлениями.

Пример. Пусть известна следующая схема замещения резистивной АЛЭЦ (рис. 1.18). Требуется определить токи в ветвях методом наложения.

По методу наложения токи i_1 , i_2 , i_3 равны алгебраической сумме токов, создаваемых каждым источником

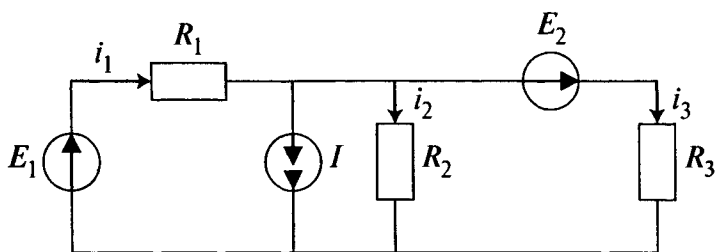


Рис. 1.18

в отдельности, если другие источники заменены своими внутренними сопротивлениями, т.е.

$$i_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13}; \quad i_2 = i_{21} + i_{22} + i_{23}; \quad i_3 = i_{31} + i_{32} + i_{33},$$

где i_{11} , i_{21} , i_{31} — частичные токи в ветвях от источника E_1 , если источники тока I и напряжения E_2 заменены в точках их подключения внутренними сопротивлениями $R = \infty$ (разрыв цепи) и $R = 0$ (короткое замыкание) соответственно; i_{12} , i_{22} , i_{32} — частичные токи в ветвях от источника I , если источники напряжений E_1 и E_2 заменены соответственно сопротивлениями $R = 0$ в точках их подключения; i_{13} , i_{23} , i_{33} — частичные токи в ветвях от источника E_2 , если источники тока I и напряжения E_1 заменены соответственно внутренними сопротивлениями $R = \infty$ и $R = 0$ в точках их подключения.

Найдем эти токи, для чего изобразим три частные схемы замещения, учитывающие соответствующие замены источников их внутренними сопротивлениями (рис. 1.19).

1. Определим частичные токи от источника E_1 (см. рис. 1.19, а). По закону Ома

$$i_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}},$$

где $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

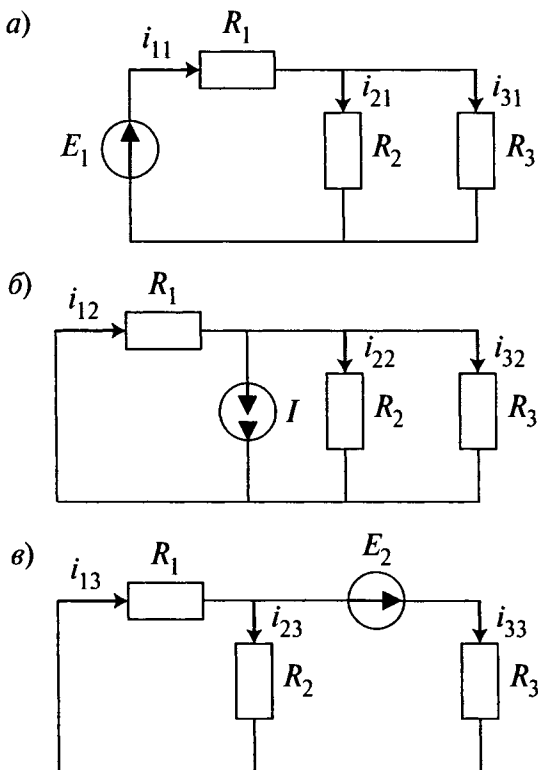


Рис. 1.19

Тогда токи i_{21} и i_{31} определим по правилу делителя тока:

$$i_{21} = \frac{i_{11} R_3}{R_2 + R_3} \quad \text{и} \quad i_{31} = \frac{i_{11} R_2}{R_2 + R_3}.$$

2. Определим частичные токи от источника I (см. рис. 1.19, б). По правилу делителя тока:

$$i_{12} = \frac{I R_{23}}{R_1 + R_{23}}, \quad i_{22} = \frac{-I R_{13}}{R_2 + R_{13}}, \quad i_{32} = \frac{-I R_{12}}{R_3 + R_{12}},$$

где $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и $R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$. Токи i_{22} и i_{32} берутся

со знаком «-», так как направление источника I противоположно выбранному направлению этих токов.

3. Определим частичные токи от источника E_2 (см. рис. 1.19, в). По закону Ома

$$i_{33} = \frac{E_2}{R_3 + R_{12}}.$$

Тогда: $i_{13} = \frac{i_{33} R_2}{R_1 + R_2}$ и $i_{23} = \frac{-i_{33} R_1}{R_1 + R_2}$.

1.3.2. Метод эквивалентного источника

Метод эквивалентного источника позволяет определить ток в одной из ветвей (нагрузке) и базируется на возможности замены любой сложной АЛЭЦ в произвольных точках подключения нагрузки a и b простой схемой эквивалентного источника напряжения (ЭИН) с параметрами U_{xx} и R_{ab} (рис. 1.20, а) или эквивалентного источника тока (ЭИТ) с параметрами $I_{кз}$ и R_{ab} (рис. 1.20, б), причем эти параметры взаимосвязаны соотношением $U_{xx} = I_{кз} R_{ab}$ [см. (1.21)].

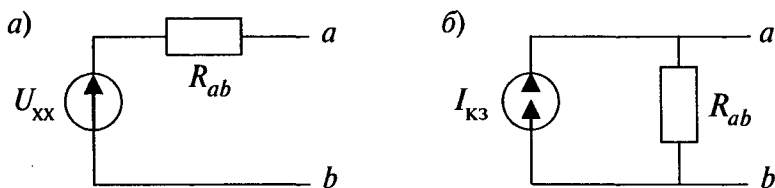


Рис. 1.20

Параметры эквивалентных источников U_{xx} , $I_{кз}$ и R_{ab} определяются по следующим правилам:

- **напряжение холостого хода U_{xx}** есть напряжение в точках эквивалентного преобразования a и b при отключении нагрузки в этих точках (холостой ход), определяемое при нескольких источниках в цепи обычно по методу наложения;
- **ток короткого замыкания $I_{кз}$** есть ток в точках преобразования a и b при их коротком замыкании, определяемый также по методу наложения;

- *внутреннее сопротивление эквивалентного источника R_{ab} есть сопротивление АЛЭЦ в точках преобразования a и b при условии замены всех источников АЛЭЦ их внутренними сопротивлениями.*

Взаимосвязь (1.21) позволяет определять только одну из пар параметров эквивалентных источников: либо U_{xx} и R_{ab} , либо $I_{кз}$ и R_{ab} .

Сущность метода эквивалентного источника состоит в том, что к ветви, подключенной в точках a и b и в которой определяется ток (напряжение), вместо сложной АЛЭЦ подключается простая схема эквивалентного источника с предварительно определенными параметрами, что позволяет использовать для расчета простые правила делителей напряжения и тока, а также закон Ома.

Пример. Пусть задана та же схема АЛЭЦ, что и на рис. 1.18, и требуется определить тот же ток i_3 .

1. *Решение методом эквивалентного источника напряжения.* Найдем U_{xx} и R_{ab} . Удалим (временно) резистивный элемент R_3 и для оставшейся схемы АЛЭЦ определим параметры R_{ab} и U_{xx} по методу наложения:

$$U_{xx} = U_{xx1} + U_{xx2} + U_{xx3}.$$

Оставим один источник E_1 (рис. 1.21, а), а затем один источник I (рис. 1.21, б).

В этих схемах (см. рис. 1.21, а и б) по правилу делителя

напряжения $U_{xx1} = \frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и по

закону Ома $U_{xx2} = \frac{-I R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

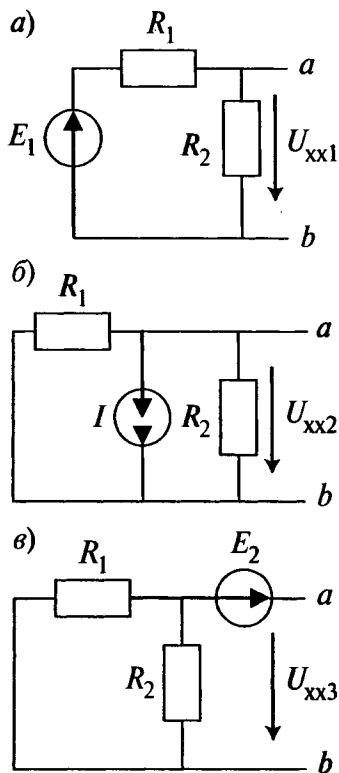


Рис. 1.21

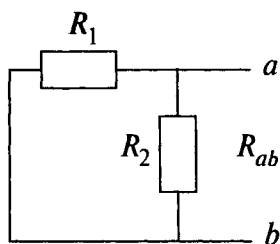


Рис. 1.22

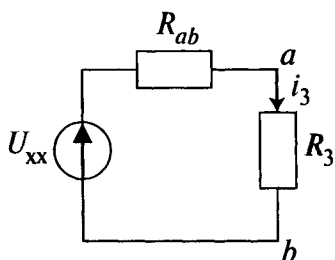


Рис. 1.23

Оставим один источник E_2 (рис. 1.21, в). Ток через элементы R_1 и R_2 в этой схеме не протекает, т.е. $U_{xx3} = E_2$.
Внутреннее сопротивление (рис. 1.22)

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

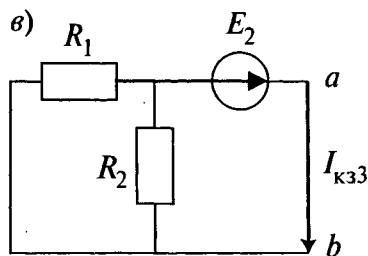
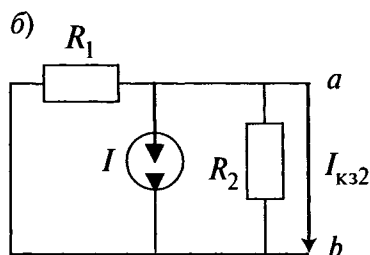
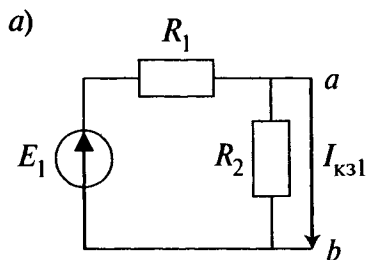


Рис. 1.24

Тогда искомый ток i_3 определим по закону Ома из простой схемы с эквивалентным источником напряжения (рис. 1.23):

$$i_3 = \frac{U_{xx}}{R_3 + R_{ab}}.$$

2. Решение методом эквивалентного источника тока. Определим параметры $I_{кз}$ и R_{ab} . Параметр R_{ab} определяется так же, как и в первом случае. Параметр $I_{кз}$ определим по методу наложения:

$$I_{кз} = I_{кз1} + I_{кз2} + I_{кз3}.$$

Тогда получим (рис. 1.24):

$$I_{кз1} = \frac{E_1}{R_1}, \quad I_{кз2} = -I,$$

$$I_{кз3} = \frac{E_2}{R_{ab}}.$$

Искомый ток i_3 определим по правилу делителя напряжения из простой схемы с эквивалентным источником тока (рис. 1.25):

$$i_3 = \frac{I_{кз} R_{ab}}{R_{ab} + R_3}.$$

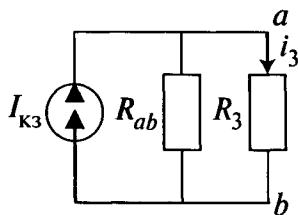


Рис. 1.25

1.3.3. Метод уравнений Кирхгофа

Для АЛЭЦ с большим числом ветвей применение методов наложения и эквивалентного источника становится достаточно громоздким.

Универсальным методом анализа АЛЭЦ является использование законов Кирхгофа (см. 1.2.1), устанавливающих закономерности электрического равновесия в электрических цепях (закон сохранения энергии).

Первый закон Кирхгофа устанавливает взаимосвязь токов для любого узла ЭЦ. Поскольку в любой ЭЦ, у которой p ветвей и q узлов, число независимых узлов $m = q - 1$, то число линейно независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, также равно m .

Второй закон Кирхгофа устанавливает взаимосвязь напряжений в любом контуре ЭЦ. Поскольку в любой ЭЦ, у которой p ветвей и q узлов, число независимых контуров $n = p - m$, то число линейно независимых уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, также равно n .

Следовательно, общее число линейно независимых уравнений для любой ЭЦ равно $m + n = p$, т.е. соответствует общему числу неизвестных токов в ветвях.

Пример. Пусть задана резистивная АЛЭЦ мостовой топологии (типа «конверт»), в которой $p = 6$ и $q = 4$ (рис. 1.26).

Следовательно:

$$m = q - 1 = 4 - 1 = 3; \quad n = p - m = 6 - 3 = 3.$$

Обозначим в этой цепи произвольные направления мгновенных токов в ветвях.

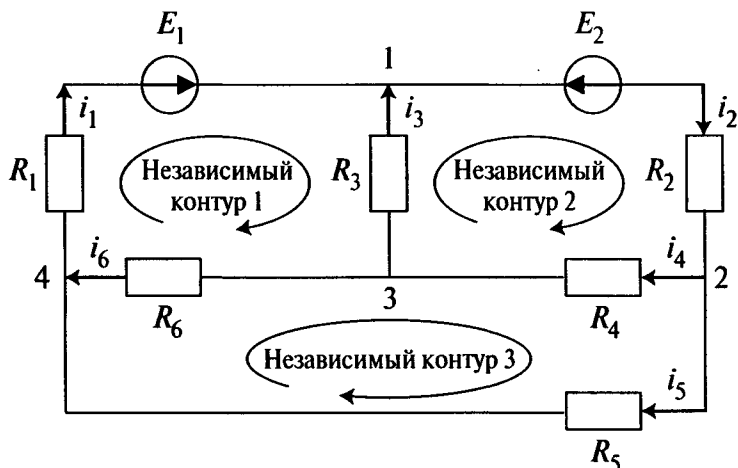


Рис. 1.26

Составим по первому закону Кирхгофа $m = 3$ уравнения для любых трех узлов, например:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для узла 1: } i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ \text{для узла 2: } i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ \text{для узла 3: } -i_3 + i_4 - i_6 = 0. \end{array} \right\} \quad (1.25)$$

Составим по второму закону Кирхгофа $n = 3$ уравнения для любых трех контуров. Например, при выборе направлений обхода контуров по часовой стрелке получим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для контура 1: } u_1 - u_3 + u_6 = E_1; \\ \text{для контура 2: } u_3 + u_2 + u_4 = -E_2; \\ \text{для контура 3: } -u_4 + u_5 - u_6 = 0. \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

По закону Ома: $u_1 = i_1 R_1$; $u_2 = i_2 R_2$; $u_3 = i_3 R_3$; $u_4 = i_4 R_4$; $u_5 = i_5 R_5$; $u_6 = i_6 R_6$. После подстановки этих соотношений в (1.26) с учетом (1.25) получим шесть уравнений с шестью неизвестными токами ветвей, которые можно решать, например, методом Крамера. После определения токов в ветвях по закону Ома находим напряжения на элементах этих ветвей.

Решение системы из шести уравнений — достаточно трудоемкая задача, поэтому решение подобных задач стремятся выполнять на ЭВМ, для чего эти уравнения требуется формализовать в матричной форме.

Уравнения (1.25) можно представить с помощью *редуцированной матрицы соединений* (см. 1.1.2). Для заданной АЛЭЦ такая матрица для узлов 1, 2 и 3 имеет вид

$$M_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (1.25) в матричной форме примет вид

$$M_{3 \times 6} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_2 + i_3 \\ i_2 - i_4 - i_5 \\ -i_3 + i_4 - i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наличие в АЛЭЦ источников тока учитывается как отдельные ветви в редуцированной матрице соединений и в матрице-столбце токов.

Уравнения (1.26) в матричной форме можно представить с помощью *матрицы контуров* N , состоящей из n строк (по числу независимых контуров) и p столбцов (по числу

ветвей), причем на пересечении i -й строки и j -го столбца стоят:

- +1, если направление тока в j -й ветви i -го контура совпадает с направлением обхода;
- 1, если направление тока противоположно направлению обхода;
- 0, если j -я ветвь в i -й контур не входит.

Если в j -й ветви имеется источник напряжения, то напряжение этой ветви $u'_j = u_j \pm E_j$, причем знак «-» ставится при совпадении направлений ЭДС источника E_j и напряжения u_j , а знак «+» в противном случае.

Для заданной АЛЭЦ: $u'_1 = u_1 - E_1$; $u'_2 = u_2 + E_2$, а редуцированная матрица контуров имеет вид

$$N_{3 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда система уравнений (1.26) в матричной форме примет вид

$$N_{3 \times 6} \times \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\text{т.е.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_1 - u_3 + u_6 \\ u'_2 + u_3 + u_4 \\ -u_4 + u_5 - u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1.4. Алгоритмические методы анализа линейных электрических цепей

Алгоритмические методы анализа АЛЭЦ подчинены определенному алгоритму, что позволяет использовать ЭВМ для расчета цепей с большим числом ветвей. Кроме того, эти методы используют меньшее число уравнений, чем метод уравнений Кирхгофа, за счет использования меньшего числа неизвестных.

1.4.1. Метод контурных токов

Метод контурных токов (МКТ) использует $n = p - t$ линейно независимых уравнений по числу независимых контуров в АЛЭЦ.

Наличие в АЛЭЦ *идеальных* (не заменяемых) *источников тока* (ИИТ), упрощает задачу анализа, так как сокращается число необходимых уравнений, поскольку ток ИИТ сразу определяет соответствующий контурный ток, при этом ИИТ должен входить только в один из независимых контуров.

При наличии в схеме *реальных источников тока* (РИТ) их следует путем эквивалентных преобразований (1.21) заменить реальными источниками напряжения (РИН) или рассматривать РИТ как контур с ИИТ, контурный ток в котором определяется током ИИТ.

МКТ использует следующие основные понятия:

- **контурный ток** — условный ток произвольного направления, протекающий в каждом независимом контуре, обозначается: $I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{kn}$;
- **собственное сопротивление контура** — алгебраическая сумма сопротивлений всех элементов контура, обозначается $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$;
- **взаимное сопротивление смежных контуров** — сопротивление общего элемента двух независимых смежных контуров, обозначается R_{ij} , где i и j — номера смежных контуров; берется со знаком «+», если направления контурных токов смежных контуров совпадают на общем элементе, и со знаком «-» в противном случае;

3. Решение матричного уравнения (1.28) относительно контурных токов в виде $[I] = [R]^{-1} \times [E]$ или системы уравнений (1.27), например, по методу Крамера:

$$I_{ki} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Δ — определитель матрицы $[R]$, а Δ_i — определитель Δ , в котором вместо i -го столбца стоит матрица-столбец $[E]$.

4. Определение токов в ветвях по методу наложения полученных значений контурных токов I_{ki} .

Пример. Требуется определить по МКТ токи в ветвях в схеме АЛЭЦ из семи ветвей (рис. 1.27).

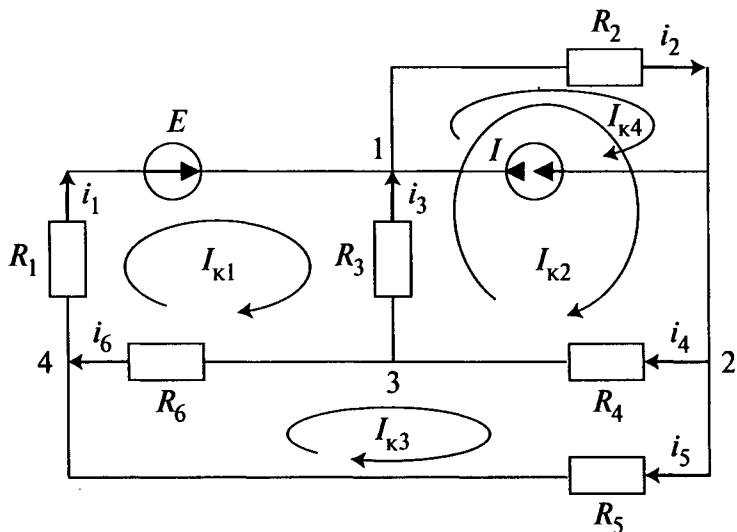


Рис. 1.27

Решаем согласно алгоритму МКТ.

1. В данной схеме АЛЭЦ имеется $n = 4$ независимых контура с контурными токами I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} и I_{k4} , направления которых и направления токов в ветвях выберем произвольно, как показано на рис. 1.27. Можно было поступить иначе: заменить реальный источник тока с параметрами I и R_2 на реальный источник напряжения.

2. Поскольку контурный ток известен ($I_{к4} = I$), получаем следующую систему стандартизованных уравнений для оставшихся трех независимых контуров:

$$\begin{cases} I_{к1} R_{11} + I_{к2} R_{12} + I_{к3} R_{13} + I_{к4} R_{14} = E_{11}; \\ I_{к1} R_{21} + I_{к2} R_{22} + I_{к3} R_{23} + I_{к4} R_{24} = E_{22}; \\ I_{к1} R_{31} + I_{к2} R_{32} + I_{к3} R_{33} + I_{к4} R_{34} = E_{33}, \end{cases}$$

где $R_{11} = R_1 + R_3 + R_6$; $R_{12} = R_{21} = -R_3$; $R_{14} = 0$; $E_{11} = E$;
 $R_{22} = R_2 + R_3 + R_4$; $R_{23} = R_{32} = -R_4$; $R_{24} = R_2$; $E_{22} = 0$;
 $R_{33} = R_4 + R_5 + R_6$; $R_{13} = R_{31} = -R_6$; $R_{34} = 0$; $E_{33} = 0$.

3. Решаем эту систему уравнений по методу Крамера:

$$I_{к1} = \frac{\begin{vmatrix} E'_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E'_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E'_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}; \quad I_{к2} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E'_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E'_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E'_{33} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}};$$

$$I_{к3} = \frac{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E'_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E'_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E'_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}},$$

где $E'_{11} = E_{11} - IR_{14}$; $E'_{22} = E_{22} - IR_{24}$; $E'_{33} = E_{33} - IR_{34}$.

4. Определяем токи в ветвях по методу наложения контурных токов:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_{к1}; & i_2 &= I_{к2}; & i_3 &= I_{к2} - I_{к1}; \\ i_4 &= I_{к2} - I_{к3}; & i_5 &= I_{к3}; & i_6 &= I_{к1} - I_{к3}. \end{aligned}$$

1.4.2. Метод узловых напряжений (потенциалов)

Метод узловых напряжений (МУН) использует $m = q - 1$ линейно независимых уравнений по числу независимых узлов в АЛЭЦ.

Наличие в АЛЭЦ *идеальных* (не заменяемых) *источников напряжения* (ИИН) упрощает задачу анализа, так как сокращается число необходимых уравнений, поскольку ИИН определяет (с учетом направления) узловое напряжение узла, к которому он подключен.

При наличии в схеме *реальных источников напряжения* (РИН) их следует заменить эквивалентными реальными источниками тока (РИТ).

МУН использует следующие основные понятия:

- **опорный узел** — это узел, который «заземляется», т.е. его потенциал принимается равным нулю; в качестве опорного следует выбирать узел, к которому примыкает наибольшее число ветвей или к которому подключены идеальные источники напряжения;
- **узловое напряжение** — это напряжение данного узла относительно опорного, обозначается U_1, U_2, \dots, U_m и всегда направлено к опорному узлу;
- **собственная проводимость узла** — алгебраическая сумма проводимостей ветвей, подключенных к данному узлу, обозначается $G_{11}, G_{22}, \dots, G_{mm}$;
- **взаимная проводимость между смежными узлами** — это проводимость ветви между двумя смежными узлами, обозначается G_{ij} (где i и j — номера смежных узлов), берется всегда со знаком «-»;
- **узловой ток** — алгебраическая сумма токов всех источников тока, подключенных к данному узлу, обозначается $I_{11}, I_{22}, \dots, I_{mm}$; при суммировании ток источника тока берется со знаком «+», если он направлен к узлу («втекает» в него), и со знаком «-» в противном случае.

Алгоритм МУН включает четыре группы операций:

1. *Выбор опорного узла*, обозначение на схеме АЛЭЦ наименований и направлений узловых напряжений

1. В заданной схеме АЛЭЦ преобразуем РИН с параметрами E и R_1 в РИТ с параметрами $I_1 = E/R_1$ и R_1 .

Выберем в качестве опорного узел 1, так как к нему примыкает наибольшее число ветвей. Обозначим узловые напряжения (направленные к опорному узлу) для остальных трех независимых узлов U_2 , U_3 и U_4 и направления токов в ветвях выберем такими, как показано на рис. 1.28.

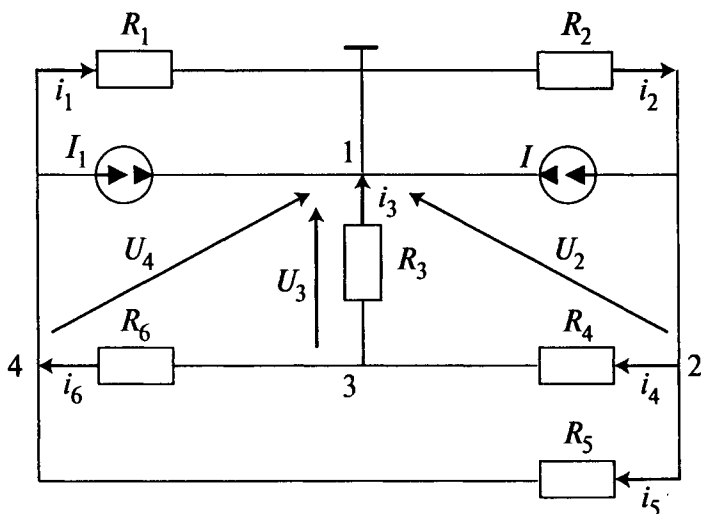


Рис. 1.28

2. Система стандартизованных уравнений для этой схемы будет иметь вид

$$\begin{cases} U_2 G_{22} + U_3 G_{23} + U_4 G_{24} = I_{22}; \\ U_2 G_{32} + U_3 G_{33} + U_4 G_{34} = I_{33}; \\ U_2 G_{42} + U_3 G_{43} + U_4 G_{44} = I_{44}, \end{cases}$$

где $G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$; $G_{23} = G_{32} = \frac{-1}{R_4}$; $I_{22} = -I$;

$G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}$; $G_{24} = G_{42} = \frac{-1}{R_5}$; $I_{33} = 0$;

$$G_{44} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}; \quad G_{34} = G_{43} = \frac{-1}{R_6}; \quad I_{44} = -I_1.$$

3. Решаем полученную систему уравнений методом Крамера:

$$U_2 = \frac{\begin{vmatrix} I_{22} & G_{23} & G_{24} \\ I_{33} & G_{33} & G_{34} \\ I_{44} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}}; \quad U_3 = \frac{\begin{vmatrix} G_{22} & I_{22} & G_{24} \\ G_{32} & I_{33} & G_{34} \\ G_{42} & I_{44} & G_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}};$$

$$U_4 = \frac{\begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} & I_{22} \\ G_{32} & G_{33} & I_{33} \\ G_{42} & G_{43} & I_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}}.$$

4. Определяем токи в ветвях по закону Ома:

$$i_1 = \frac{U_4}{R_1}; \quad i_2 = \frac{-U_2}{R_2};$$

$$i_3 = \frac{U_3}{R_3}; \quad i_4 = \frac{U_2 - U_3}{R_4};$$

$$i_5 = \frac{U_2 - U_4}{R_5}; \quad i_6 = \frac{U_3 - U_4}{R_6}.$$

1.5. Методы анализа нелинейных электрических цепей

1.5.1. Виды, характеристики и параметры нелинейных элементов

Элемент ЭЦ с нелинейной вольт-амперной характеристикой (ВАХ) является *нелинейным элементом* (НЭ). Наличие в ЭЦ хотя бы одного НЭ делает ее *нелинейной ЭЦ* (НЭЦ).

Все пассивные элементы R , L , C могут быть *линейными* и *нелинейными*, в последнем случае их обозначают так, как показано на рис. 1.29.

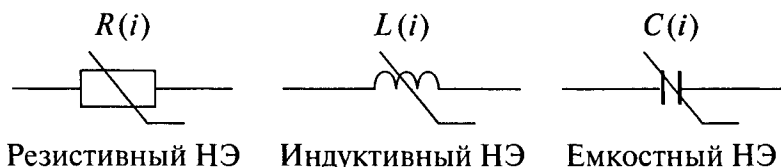


Рис. 1.29

Нелинейные элементы могут иметь монотонную, N- или S-образную ВАХ (рис. 1.30):



Рис. 1.30

Для НЭ, управляемых с помощью внешних воздействий, положение ВАХ может изменяться, что порождает целое «семейство» ВАХ, построенных для различных управляющих воздействий. Например, для радиолампы,

транзистора и других приборов известны «семейства» анодных, сеточных, коллекторных, эмиттерных и прочих характеристик.

Наиболее распространены *резистивные* НЭ: лампы накаливания, барреторы (стабилизаторы тока), термисторы, терморезисторы, стабилитроны (стабилизаторы напряжения), неоновые лампы, ламповые и полупроводниковые диоды и триоды, разрядники и др. В магнитных цепях используются *нелинейные индуктивности*.

На рис. 1.31 приведены ВАХ наиболее распространенных резистивных НЭ: 1 — лампы накаливания с вольфрамовой нитью; 2 — лампы накаливания с угольной нитью; 3 — барреторы; 4 — стабилитроны, неоновые лампы; 5 — полупроводниковые диоды; 6 — ламповые диоды.

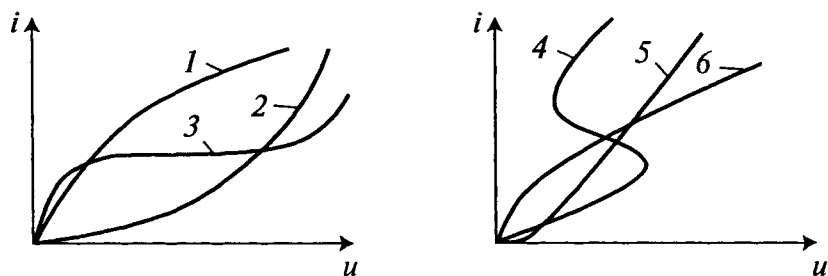


Рис. 1.31

Основные параметры НЭ (рис. 1.32):

1) *статическое сопротивление* $R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{G_0}$;

2) *динамическое сопротивление* $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{1}{S}$ или *крутизна* S .

Точка P называется *рабочей точкой* ВАХ, определяющей статический режим работы НЭ, т.е. при отсутствии переменных воздействий (режим постоянного тока).

Статическое сопротивление пропорционально $\operatorname{ctg} \alpha$, а динамическое — пропорционально $\operatorname{ctg} \beta$.

Сопротивление R_0 всегда больше 0, а R_d зависит от вида ВАХ: для ее возрастающих участков $R_d > 0$, а для спадающих («падающих») $R_d < 0$.

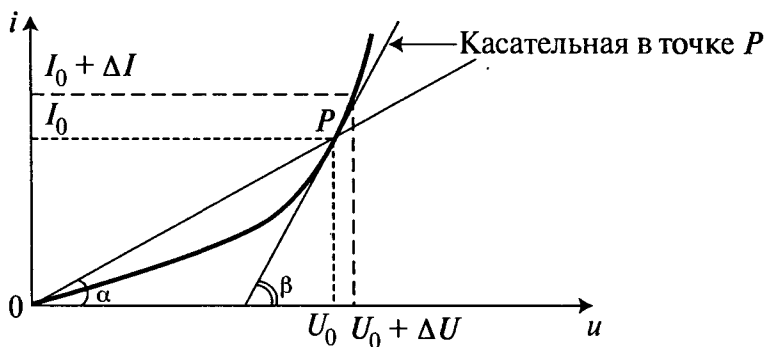


Рис. 1.32

Нелинейные элементы со спадающим участком ВАХ (например, туннельный диод, неоновая лампа и др.) называют *негатронами*, так как они способны на этом участке отдавать электрическую энергию, т.е. генерировать или усиливать электрические сигналы.

Чем больше разница между R_0 и R_d , тем больше нелинейность ВАХ (нелинейные свойства НЭ). Параметр «крутизна ВАХ» $S = 1/R_d$ широко используется при анализе работы радиоламп, транзисторов и других НЭ.

1.5.2. Графические методы анализа нелинейных ЭЦ

Последовательное или параллельное соединение нескольких НЭ удобно анализировать с помощью *обобщенной ВАХ НЭЦ*, полученной графическим объединением ВАХ всех НЭ, при этом учет влияния источников сводится к смещению обобщенной ВАХ по оси абсцисс (для источника напряжения) или по оси ординат (для источника тока).

На рис. 1.33 приведен пример последовательного соединения линейного и двух нелинейных элементов.

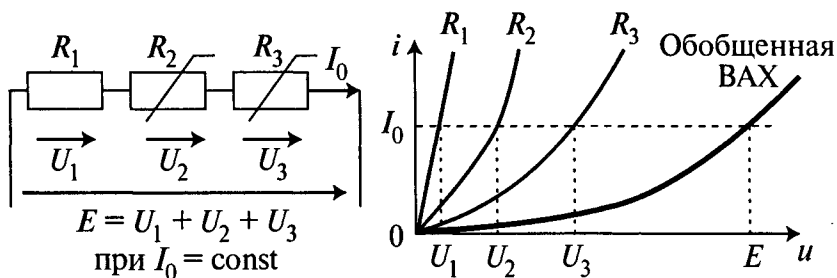


Рис. 1.33

Иногда целесообразно применять метод *опрокинутой* ВАХ (рис. 1.34). Он удобен для определения рабочей точки на ВАХ НЭ при изменении величины R_1 .

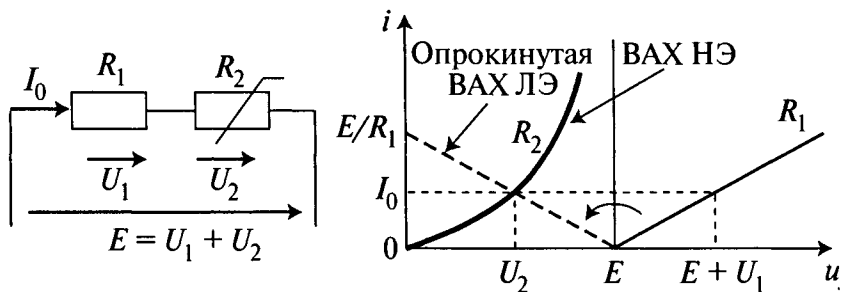


Рис. 1.34

На рис. 1.35 приведен пример параллельного соединения линейного и двух нелинейных элементов.

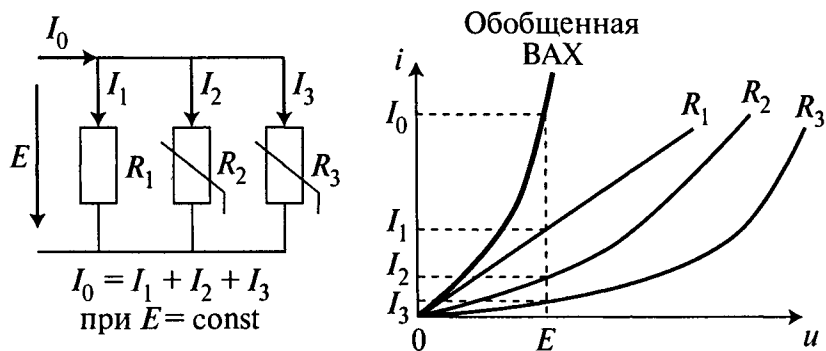


Рис. 1.35

При смешанном (параллельном и последовательном) соединении НЭ задача построения обобщенной ВАХ решается последовательно: сначала строится ВАХ для параллельно соединенных НЭ, а затем — для последовательно соединенных НЭ (рис. 1.36).

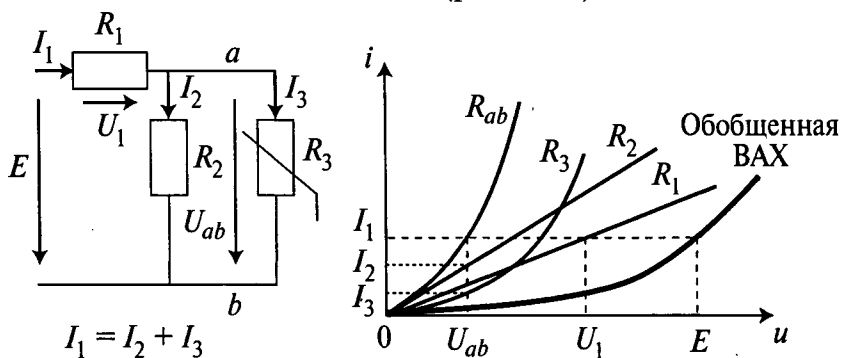


Рис. 1.36

Наличие ВАХ всех элементов ЭЦ позволяет определять все токи и напряжения в цепи по одному известному (заданному) току или напряжению.

1.5.3. Аналитические методы анализа нелинейных ЭЦ

Графические методы анализа НЭЦ наглядны, но они носят индивидуальный характер, т.е. не позволяют проводить обобщенный анализ НЭЦ при произвольных нелинейных элементах и видах воздействий.

Аналитические методы свободны от этого недостатка, но требуют аналитической аппроксимации ВАХ НЭ. Наиболее часто используются два вида аппроксимации ВАХ НЭ:

- полиномиальная;
- кусочно-линейная.

При полиномиальной аппроксимации ВАХ НЭ аппроксимируется *полиномом* вида

$$i = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + \dots + C_n u^n.$$

Коэффициенты аппроксимирующего полинома могут быть определены путем решения системы уравнений, полученной из ВАХ НЭ.

Пример. Для полинома $i = C_0 + C_1 u + C_2 u^2$ по заданной ВАХ НЭ (рис. 1.37) для трех точек ВАХ получим $C_0 = i_0$ и два уравнения:

$$C_0 + C_1 u_1 + C_2 u_1^2 = i_1;$$

$$C_0 + C_1 u_2 + C_2 u_2^2 = i_2.$$

Из этих уравнений находим значения C_1 и C_2 .

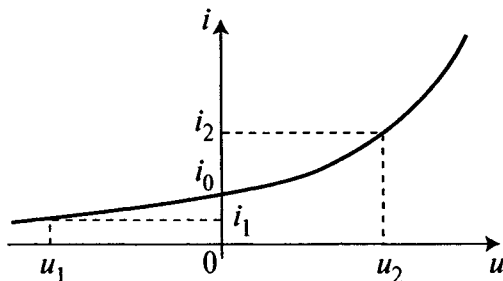


Рис. 1.37

При кусочно-линейной аппроксимации ВАХ НЭ аппроксимируется *совокупностью линейных участков* (кусков) вблизи возможных рабочих точек.

Пример. Для двух участков нелинейной ВАХ (рис. 1.38) получим:

крутизна первого участка линеаризации

$$S_1 = \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1},$$

крутизна второго участка линеаризации

$$S_2 = \frac{i_3 - i_2}{u_3 - u_2}.$$

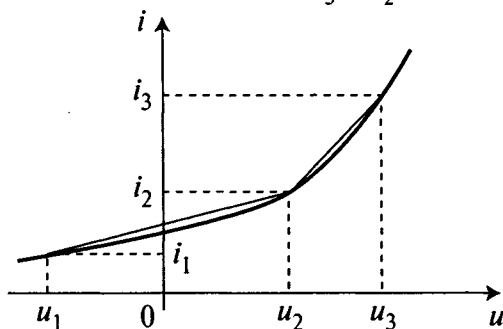


Рис. 1.38

Пример. Пусть требуется линеаризовать участок ВАХ между точками A и B , который используется в качестве рабочей области около рабочей точки P (рис. 1.39).

Участок AB ВАХ НЭ заменяем «куском» прямой линии с крутизной

$$S = \frac{i_2 - i_1}{U_2 - U_1}.$$

Тогда уравнение линеаризованного участка ВАХ вблизи рабочей точки P будет

$$u = -U_0 + \frac{i}{S}.$$

Очевидно, что аналитическая аппроксимация ВАХ верна только для выбранного участка линеаризации.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Понятия «компонент» и «элемент» электрической цепи.
2. Виды идеализированных элементов и их особенности.
3. Основные понятия топологии электрических цепей.
4. Методы формализации топологии электрических цепей.
5. Сущность законов Кирхгофа и Ома.
6. Правила делителей напряжения и тока.
7. Условие и виды простейших эквивалентных преобразований.
8. Сущность метода наложения.
9. Сущность метода эквивалентного источника.
10. Сущность метода уравнений Кирхгофа.
11. Основные понятия и алгоритм МКТ.
12. Основные понятия и алгоритм МУН.
13. Виды нелинейных элементов и их ВАХ, основные параметры.
14. Графические методы анализа нелинейных электрических цепей.
15. Аналитические методы анализа нелинейных электрических цепей.

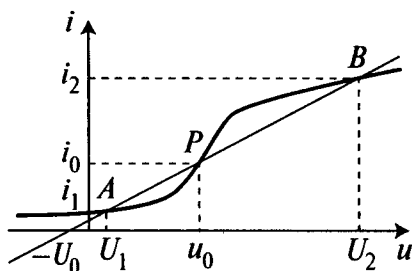


Рис. 1.39

Тема 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

2.1. Гармоническое воздействие на идеализированные элементы

2.1.1. Формы представления гармонического воздействия

При частотном анализе ЭЦ используют гармоническое воздействие (ГВ) вида

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \psi_0) = V_m \sin \Phi(t), \quad (2.1)$$

где V_m — амплитуда ГВ, причем $V_m = U_m$ или $V_m = I_m$; $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ — угловая частота ГВ, рад/с (f и T — частота (Гц) и период (с) ГВ соответственно); ωt и ψ_0 — текущая и начальная фаза ГВ соответственно (рад или град.); $\Phi(t) = \omega t + \psi_0$ — полная фаза ГВ (рад или град.).

Наглядно ГВ можно изобразить в виде *временной диаграммы*, представляющей собой развертку во времени процесса вращения вектора длиной V_m против часовой стрелки с угловой частотой ω из начального положения (фазы) ψ_0 (рис. 2.1).

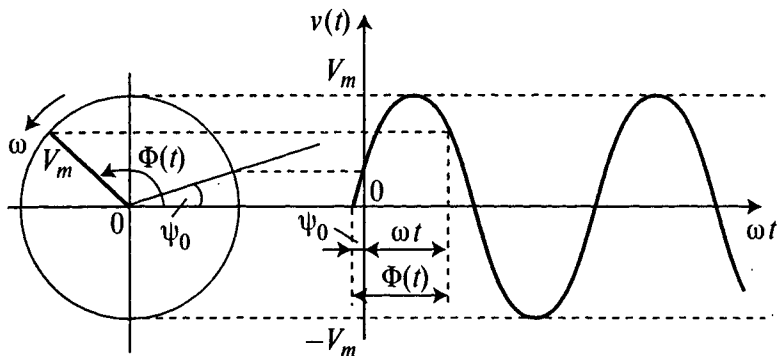


Рис. 2.1

Векторные и временные диаграммы просты и наглядны, но при расчетах неудобны (особенно при большом числе ГВ), так как требуют геометрических построений при сложении векторов. Более удобно располагать вектор ГВ на комплексной плоскости, тогда конец этого вектора можно выразить некоторым комплексным числом, называемым «текущим комплексом» ГВ; сам вектор ГВ в этом случае называют *символическим* (рис. 2.2).

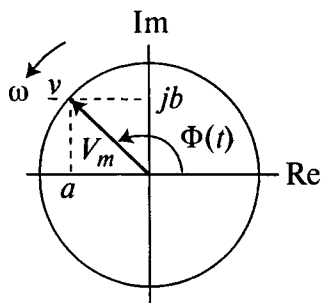


Рис. 2.2

Текущий комплекс ГВ — это мгновенное текущее значение ГВ $y(t)$ на комплексной плоскости; как и любое комплексное число, его можно представить в трех формах:

1) *алгебраической*:

$$\underline{y} = a + jb, \quad (2.2)$$

где $j = \pm\sqrt{-1} = \exp\left(\pm j \frac{\pi}{2}\right)$ — мнимая единица;

2) *тригонометрической*:

$$\underline{y} = V_m \cos \Phi(t) + jV_m \sin \Phi(t),$$

где $V_m = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\Phi(t) = \pm \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$; (2.3)

3) *показательной*:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= V_m \exp[\pm \Phi(t)] = V_m \exp(\pm \psi_0) \exp(j\omega t) = \\ &= \underline{V}_m \exp(j\omega t), \end{aligned}$$

где $\underline{V}_m = V_m \exp(\pm \psi_0)$. (2.4)

Величину \underline{V}_m называют *комплексной амплитудой* ГВ. Она несет информацию только об амплитуде V_m и начальной фазе ψ_0 ГВ, что при известной частоте ω вполне достаточно для анализа свойств ЭЦ. Поэтому все известные методы анализа ЭЦ при гармоническом воздействии

используют в качестве переменных комплексные амплитуды тока \underline{I}_m и напряжения \underline{U}_m , что составляет суть «символического» метода анализа ЭЦ, так как комплексная амплитуда есть начальное (при $t = 0$) значение символического (воображаемого) вектора ГВ на комплексной плоскости.

Из показательной формы представления ГВ следует, что текущий комплекс ГВ \underline{y} есть точка на комплексной плоскости, совпадающая с концом зафиксированного в момент времени t символического вектора, вращающегося с угловой частотой ω , координаты которого есть мгновенные значения $v(t)$ тока или напряжения. Действительно, проекция символического вектора на действительную ось Re есть значение $a(t) = V_m \cos \Phi(t)$, а проекция на мнимую ось Im есть значение $b(t) = V_m \sin \Phi(t)$, т.е. мгновенные значения тока или напряжения могут изменяться либо по косинусоиду, либо по синусоиду (в зависимости от выбранной проекции). В данной работе используем косинусоидальное представление мгновенных значений ГВ.

На практике часто используют следующие **три свойства текущего комплекса**:

1. Умножение текущего комплекса на мнимую единицу приводит к повороту символического вектора на прямой угол:

$$\underline{y}(\pm j) = \underline{V}_m \exp(j\omega t) \exp\left(\pm j \frac{\pi}{2}\right) = \underline{V}_m \exp\left[j\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (2.5)$$

2. Производная от текущего комплекса по времени равна произведению текущего комплекса на множитель $j\omega$:

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \frac{d[\underline{V}_m \exp(j\omega t)]}{dt} = j\omega \underline{V}_m \exp(j\omega t) = j\omega \underline{y}. \quad (2.6)$$

3. Интеграл от текущего комплекса равен отношению текущего комплекса к делителю $j\omega$:

$$\int \underline{y} dt = \int \underline{V}_m \exp(j\omega t) dt = \frac{\underline{V}_m \exp(j\omega t)}{j\omega} = \frac{\underline{y}}{j\omega}. \quad (2.7)$$

2.1.2. Идеализированные элементы при гармоническом воздействии

Рассмотрим реакцию пассивных идеализированных элементов на гармоническое воздействие. В качестве воздействия будем полагать приложенное к ним *напряжение*, а в качестве отклика — *ток* через соответствующие идеализированные элементы.

1. **Резистивный элемент при ГВ.** Если ГВ — это текущий комплекс напряжения $\underline{u} = \underline{U}_m \exp(j\omega t + \psi_{0u})$, то по закону Ома текущий комплекс тока (отклик, реакция)

$$\underline{i}_r = \frac{\underline{u}}{R} = \frac{\underline{U}_m}{R} \exp(j\omega t + \psi_{0u}) = \underline{I}_{mr} \exp(j\omega t + \psi_{0i}).$$

Тогда для резистивного элемента получим

$$\underline{I}_{mr} = \frac{\underline{U}_m}{R}, \quad I_{mr} = \frac{U_m}{R}, \quad \psi_{0i} = \psi_{0u}, \quad (2.8)$$

т.е. на резистивном элементе ток и напряжение совпадают по фазе, или фазовый сдвиг

$$\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = 0.$$

Мгновенная мощность резистивного элемента

$$\begin{aligned} p_r(t) &= u i_r = U_m \cos(\omega t + \psi_{0u}) I_{mr} \cos(\omega t + \psi_{0i}) = \\ &= \frac{U_m^2 \cos^2(\omega t + \psi_{0u})}{R} = \frac{U_m^2}{2R} + \frac{U_m^2}{2R} \cos[2(\omega t + \psi_{0u})], \end{aligned}$$

тогда средняя мощность за период воздействия T

$$P_r = \frac{1}{T} \int_0^T p_r(t) dt = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{U_m I_{mr}}{2} = \frac{I_{mr}^2 R}{2}. \quad (2.9)$$

Вывод. Мощность резистивного элемента, как мгновенная, так и средняя за период, всегда положительна, т.е. резистивный элемент всегда только потребляет электрическую энергию.

При расчетах часто вместо амплитуд тока I_m и напряжения U_m используют *действующие (эффективные) значения тока и напряжения*, которые связаны с амплитудными значениями множителем $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$:

$$I = 0,707 I_m; \quad U = 0,707 U_m.$$

Тогда *действующие комплексные значения тока и напряжения*

$$\underline{I} = 0,707 \underline{I}_m; \quad \underline{U} = 0,707 \underline{U}_m. \quad (2.10)$$

2. Индуктивный элемент при ГВ. Если ГВ — это напряжение $\underline{u} = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$, то согласно (1.5) и (2.7) текущий комплекс тока при нулевых начальных условиях ($I_l(0) = 0$)

$$\underline{i}_l = \frac{1}{L} \int_0^t \underline{u} dt = \frac{1}{L} \int_0^t \underline{U}_m \exp(j\omega t) dt = \frac{\underline{U}_m}{j\omega L} \exp(j\omega t).$$

Тогда для индуктивного элемента получим

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ml} &= \frac{\underline{U}_m}{j\omega L} = \frac{U_m \exp(j\psi_{0u})}{\omega L} \exp\left(-j\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{U_m}{\omega L} \exp\left[j\left(\psi_{0u} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

т.е. $\underline{I}_{ml} = I_{ml} \exp(j\psi_{0i})$, $I_{ml} = \frac{U_m}{\omega L}$, $\psi_{0i} = \psi_{0u} - \frac{\pi}{2}$. (2.11)

Следовательно, на индуктивном элементе символический вектор тока отстаёт от символического вектора напряжения на прямой угол, т.е. фазовый сдвиг

$$\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = \frac{\pi}{2}.$$

Величина ωL имеет размерность сопротивления (Ом) и называется *реактивным сопротивлением индуктивного элемента*: $X_l = \omega L$.

Мгновенная мощность индуктивного элемента

$$p_l(t) = ui_l = U_m \cos(\omega t + \psi_{0u}) I_{ml} \cos\left(\omega t + \psi_{0i} - \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{U_m I_{ml}}{2} \sin\left[2(\omega t + \psi_{0u})\right],$$

тогда средняя мощность за период воздействия T

$$P_l = \frac{1}{T} \int_0^T p_l(t) dt = 0.$$

Вывод. Мгновенная мощность индуктивного элемента в один полупериод ГВ положительна (энергия запасается в магнитном поле), а в другой полупериод отрицательна (энергия отдается источнику), при этом средняя мощность за период равна нулю, т.е. безвозвратные потери энергии отсутствуют (сколько энергии запасается, столько и отдается). Поэтому индуктивный элемент называют *реактивным*, т.е. возвращающим энергию.

3. Емкостный элемент при ГВ. Если ГВ — это напряжение $\underline{u} = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$, то согласно (1.9) и (2.6) текущий комплекс тока

$$\underline{i}_c = C \frac{d\underline{u}}{dt} = C \frac{d[\underline{U}_m \exp(j\omega t)]}{dt} = j\omega C \underline{U}_m \exp(j\omega t).$$

Тогда для емкостного элемента получим

$$\underline{I}_{mc} = j\omega C \underline{U}_m = \omega C U_m \exp(j\psi_{0u}) \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) = \\ = \omega C U_m \exp\left[j\left(\psi_{0u} + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

т.е. $\underline{I}_{mc} = I_{mc} \exp(j\psi_{0i})$, $I_{mc} = U_m \omega C$, $\psi_{0i} = \psi_{0u} + \frac{\pi}{2}$. (2.12)

Следовательно, на емкостном элементе символический вектор тока опережает символический вектор напряжения на прямой угол, т.е. фазовый сдвиг $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = -\frac{\pi}{2}$.

Величина ωC имеет размерность проводимости (См) и называется *реактивной проводимостью емкостного элемента*: $Y_c = \omega C$.

Мгновенная мощность емкостного элемента

$$p_c(t) = u i_c = U_m \cos(\omega t + \psi_{0u}) I_{mc} \cos\left(\omega t + \psi_{0i} + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{U_m I_{mc}}{2} \sin\left[2(\omega t + \psi_{0u})\right],$$

тогда средняя мощность за период T

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p_c(t) dt = 0.$$

Вывод. Мгновенная мощность емкостного элемента в один полупериод ГВ положительна (энергия запасается в *электрическом* поле), а в другой полупериод отрицательна (энергия отдается источнику), при этом средняя мощность за период равна нулю, т.е. безвозвратные потери энергии отсутствуют (сколько энергии запасается, столько и отдается). Поэтому емкостный элемент также называют *реактивным*, т.е. возвращающим энергию.

2.2. Символический анализ простейших линейных электрических цепей

2.2.1. Комплексные сопротивления и проводимости ЭЦ

В соответствии с законом Ома отношение комплексной амплитуды напряжения на элементе (участке) ЭЦ к комплексной амплитуде тока в этом элементе (участке) есть *комплексное сопротивление* этого элемента (участка):

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} \exp[j(\psi_{0u} - \psi_{0i})] = \\ &= Z \exp(j\varphi) = R + jX,\end{aligned}\quad (2.13)$$

где $Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + X^2}$ — модуль комплексного сопротивления (рис. 2.3); $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$ — аргумент (сдвиг фаз между векторами напряжения и тока) комплексного сопротивления; $R = Z \cos \varphi$ — резистивная часть комплексного сопротивления; $X = Z \sin \varphi$ — реактивная часть комплексного сопротивления.

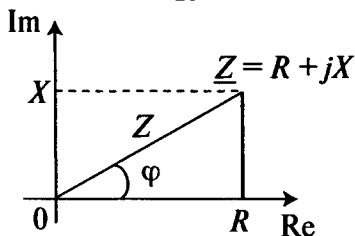


Рис. 2.3

Величина, обратная комплексному сопротивлению \underline{Z} , называется *комплексной проводимостью* элемента (участка) ЭЦ:

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I_m}{U_m} = Y \exp(-j\varphi) = G + jB = \\ &= Y \cos(-\varphi) + jY \sin(-\varphi),\end{aligned}\quad (2.14)$$

где $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ — модуль комплексной проводимости; $-\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{G}$ — аргумент комплексной проводимости; $G = Y \cos(-\varphi)$ — резистивная часть комплексной проводимости; $B = Y \sin(-\varphi)$ — реактивная часть комплексной проводимости.

С учетом (2.8), (2.11) и (2.12) получим комплексные сопротивление и проводимость идеализированных пассивных элементов:

- резистивного

$$\underline{Z}_r = \frac{U_m}{\underline{I}_{mr}} = R; \quad \underline{Y}_r = \frac{1}{R} = G; \quad (2.15)$$

- индуктивного

$$\underline{Z}_l = \frac{U_m}{\underline{I}_{ml}} = j\omega L = jX_l; \quad (2.16)$$

$$\underline{Y}_l = \frac{1}{jX_l} = \frac{-j}{X_l} = \frac{-j}{\omega L} = jB_l,$$

т.е. $X_l = \omega L$ — реактивное сопротивление, а $B_l = \frac{-1}{\omega L}$ — реактивная проводимость индуктивного элемента;

- емкостного

$$\underline{Z}_c = \frac{U_m}{\underline{I}_{mc}} = \frac{1}{j\omega C} = jX_c; \quad (2.17)$$

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{jX_c} = \frac{-j}{X_c} = j\omega C = jB_c,$$

т.е. $X_c = \frac{-1}{\omega C}$ — реактивное сопротивление, а $B_c = \omega C$ — реактивная проводимость емкостного элемента.

2.2.2. Треугольники сопротивлений (проводимостей) и векторные диаграммы простейших линейных двухполюсников

1. Последовательное соединение одного резистивного (R) и одного реактивного (X) элемента (рис. 2.4). Согласно символическому методу, если в качестве воздействия полагать комплексную амплитуду общего тока \underline{I}_m , а в качестве отклика — комплексную амплитуду напряжения \underline{U}_m , то по второму закону Кирхгофа получим

$$\begin{aligned}\underline{U}_m &= \underline{U}_{mr} + \underline{U}_{mx} = \underline{I}_m R + \underline{I}_m jX = \\ &= \underline{I}_m (R + jX),\end{aligned}$$

т.е. $\underline{Z} = R + jX = Z \exp(j\varphi) =$
 $= \sqrt{R^2 + X^2} \exp\left(j \arctg \frac{X}{R}\right).$

Для цепи с индуктивным элементом

$$\underline{Z} = R + jX_l = R + j\omega L,$$

т.е. $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}; \quad \varphi_l = \arctg \frac{\omega L}{R} > 0.$ (2.18)

Для цепи с емкостным элементом

$$\underline{Z} = R + jX_c = R + j \frac{-1}{\omega C},$$

т.е. $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; \quad \varphi_c = \arctg \frac{-1}{\omega CR} < 0.$ (2.19)

Таким образом, в цепи с индуктивным элементом аргумент комплексного сопротивления $\varphi_l > 0$ (признак индуктивного характера цепи), а в цепи с емкостным элементом $\varphi_c < 0$ (признак емкостного характера цепи).

Для проводимости последовательной цепи получим

$$-\varphi_l < 0 \quad \text{и} \quad -\varphi_c > 0$$

(убедиться самостоятельно, используя (2.14), (2.16), (2.17)).

Треугольник сопротивлений для последовательной смешанной цепи с индуктивным элементом приведен на рис. 2.5, а, а с емкостным элементом — на рис. 2.5, б.

Наглядное представление о характере цепи дают векторные диаграммы для комплексных амплитуд токов и напряжений: на комплексной плоскости изображают символические векторы токов и напряжений, действующих в цепи.

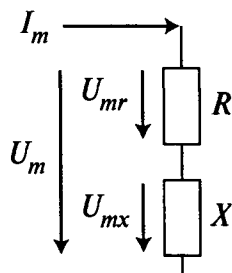


Рис. 2.4

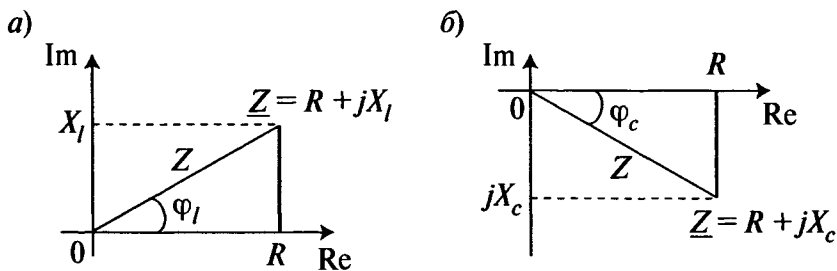


Рис. 2.5

Для последовательной смешанной цепи векторные диаграммы токов и напряжений (масштабы для токов и напряжений различны и выбираются исходя из удобства представления векторов) при заданном токе воздействия приведены на рис. 2.6. В цепи с индуктивным элементом (см. рис. 2.6, а) вектор тока *отстаёт* от вектора напряжения, а в цепи с ёмкостным элементом (см. рис. 2.6, б) — *опережает* его.

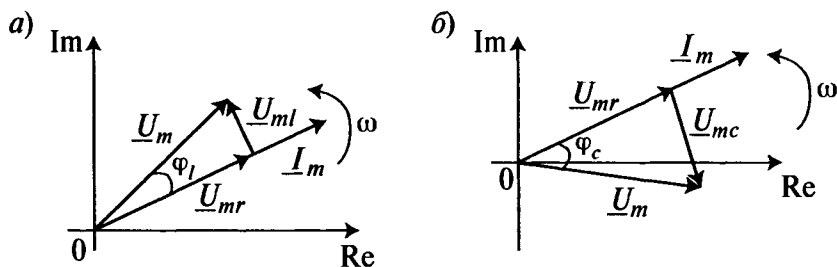


Рис. 2.6

2. **Параллельное соединение** одного резистивного и одного реактивного элемента (рис. 2.7). Согласно

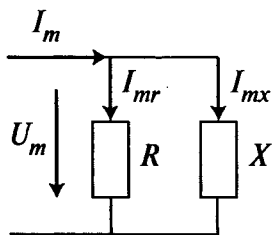


Рис. 2.7

символическому методу, если в качестве воздействия полагать комплексную амплитуду общего напряжения \underline{U}_m , а в качестве отклика — комплексную амплитуду тока \underline{I}_m , то по первому закону Кирхгофа получим

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mr} + \underline{I}_{mx} = \underline{U}_m \frac{1}{R} + \underline{U}_m \frac{1}{jX} = \underline{U}_m \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX} \right),$$

т.е. $\underline{Y} = \frac{1}{R} - j \frac{1}{X} = G + jB = Y \exp(-j\varphi) =$
 $= \sqrt{G^2 + B^2} \exp\left(j \operatorname{arctg} \frac{B}{G}\right).$

Для цепи с индуктивным элементом

$$\underline{Y}_l = \frac{1}{R} - j \frac{1}{X_l} = G - j \frac{1}{\omega L} = G + j \left(\frac{-1}{\omega L} \right) = G + jB_l,$$

т.е. $-\varphi_l = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\omega LG} < 0$, или $\varphi_l > 0$ (индуктивный характер).

Таким образом, треугольник проводимостей для параллельной цепи с индуктивным элементом аналогичен треугольнику сопротивлений для последовательной цепи с емкостным элементом (см. рис. 2.5, б), т.е. цепи дуальные.

Для цепи с емкостным элементом

$$\underline{Y}_c = \frac{1}{R} - j \frac{1}{X_c} = G - j(-\omega C) = G + j\omega C = G + jB_c,$$

т.е. $-\varphi_c = \operatorname{arctg} \frac{\omega C}{G} > 0$, или $\varphi_c < 0$ (емкостный характер).

Таким образом, треугольник проводимостей для параллельной цепи с емкостным элементом аналогичен треугольнику сопротивлений для последовательной цепи с индуктивным элементом (см. рис. 2.5, а), т.е. цепи дуальные.

Следовательно, в любой цепи с индуктивным элементом аргумент комплексного сопротивления (комплексной проводимости) всегда *положительный (отрицательный)*, а в любой цепи с емкостным элементом — всегда *отрицательный (положительный)*.

Для схемы параллельного соединения резистивного и реактивного элементов векторные диаграммы токов и напряжений (масштабы токов и напряжений различны и выбираются исходя из удобства их представления) при заданном напряжении воздействия приведены на рис. 2.8.

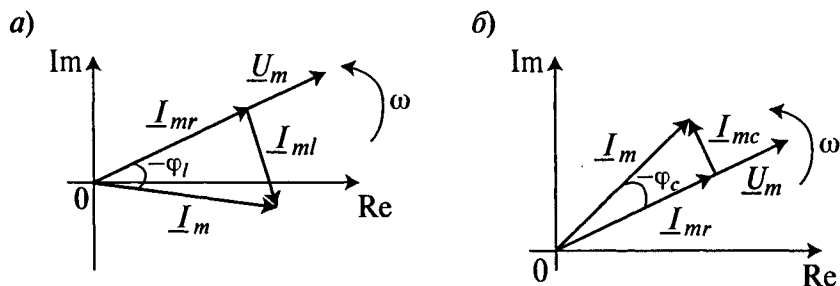


Рис. 2.8

В цепи с индуктивным элементом (см. рис. 2.8, а) вектор тока *отстает* от вектора напряжения, а в цепи с емкостным элементом (см. рис. 2.8, б) — *опережает* его.

2.2.3. Резонанс напряжений и токов в ЭЦ

В линейной ЭЦ с двумя дуальными реактивными элементами на определенной частоте гармонического воздействия возникают явления резонанса напряжений и резонанса токов, которые широко используются в колебательных контурах устройств связи.

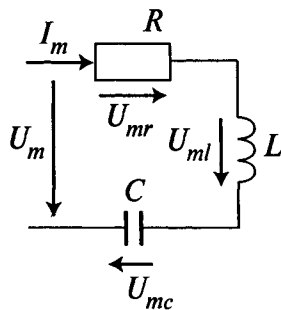


Рис. 2.9

Рассмотрим символический анализ двух схем смешанной ЭЦ, т.е. ЭЦ, содержащей два дуальных реактивных элемента и резистивный элемент.

1. Последовательное соединение резистивного элемента и двух дуальных реактивных элементов (рис. 2.9). Если в качестве воздействия полагать ток I_m , то по второму закону Кирхгофа

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{mr} + \underline{U}_{ml} + \underline{U}_{mc} = \underline{I}_m \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I}_m \underline{Z},$$

т.е. $\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX = Z \exp(j\varphi);$

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

В такой цепи возможны три случая:

1) если $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $X > 0$; $\varphi > 0$ — индуктивный характер цепи;

2) если $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, то $X < 0$; $\varphi < 0$ — емкостный характер цепи;

3) если $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, то $X = 0$; $\varphi = 0$ — резистивный характер цепи.

В последнем случае в цепи на резонансной частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.20)$$

имеет место **резонанс напряжений**, так как при $X = 0$ имеем $\underline{Z} = R$ и ток \underline{I}_m в цепи максимальный: $I_{m0} = U_m/R$. Этот ток создает на реактивных элементах одинаковые по величине и противоположные по направлению напряжения $|U_{m0l}| = |U_{m0c}| = I_{m0} X_0 = U_m X_0/R$, которые могут превышать напряжение воздействия U_m в X_0/R раз (явление резонанса).

2. **Параллельное соединение** резистивного элемента и двух дуальных реактивных элементов (рис. 2.10). Если в качестве воздействия полагать **напряжение** \underline{U}_m , то по первому закону Кирхгофа

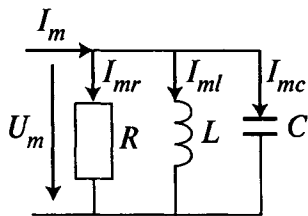


Рис. 2.10

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mr} + \underline{I}_{ml} + \underline{I}_{mc} = \underline{U}_m \left(G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \underline{U}_m \underline{Y},$$

т.е. $\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = G + jB = Y \exp(-j\varphi);$

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L}.$$

В такой цепи также возможны три случая:

1) если $\omega C > \frac{1}{\omega L}$, то $B > 0$; $-\varphi > 0$ ($\varphi < 0$) — емкостный характер цепи;

2) если $\omega C < \frac{1}{\omega L}$, то $B < 0$; $-\varphi < 0$ ($\varphi > 0$) — индуктивный характер цепи;

3) если $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$, то $B = 0$; $\varphi = 0$ — резистивный характер цепи.

В последнем случае в такой цепи на резонансной частоте ω_0 [см. (2.20)] имеет место **резонанс токов**, так как при $B = 0$: $\underline{Y} = G = 1/R$, т.е. при заданном напряжении воздействия \underline{U}_m обеспечивается общий ток $I_{m0} = U_m G$, а в реактивных элементах противоположные по направлениям и равные по величине токи $|I_{m0l}| = |I_{m0c}| = U_m B_0 = I_{m0} B_0 / G$, которые могут в B_0/R раз превышать ток I_{m0} (явление резонанса).

Графики частотных зависимостей величины реактивных сопротивлений (проводимостей) в цепи с двумя дуальными реактивными элементами приведены на рис. 2.11.

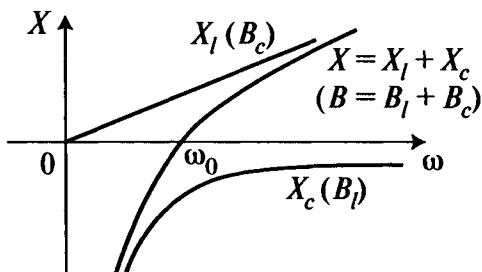


Рис. 2.11

2.3. Энергетический анализ линейных электрических цепей

2.3.1. Виды мощностей в электрических цепях и их баланс

Рассмотрим мгновенную мощность произвольного пассивного линейного двухполюсника при гармоническом воздействии.

При воздействии $u = U_m \cos(\omega t)$ (полагаем $\psi_{0u} = 0$) отклик равен

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_{0i}) = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Тогда мгновенная мощность цепи

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi + \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t) \cos \varphi + \sin(2\omega t) \sin \varphi] = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi [1 + \cos(2\omega t)] + \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t) \sin \varphi = \\ &= p_r(t) + p_x(t) = P [1 + \cos(2\omega t)] + Q \sin(2\omega t), \end{aligned}$$

где $p_r(t)$ (всегда больше 0) — мгновенная резистивная мощность потерь; $p_x(t)$ (больше или меньше 0) — мгновенная реактивная мощность потерь.

Амплитуда $p_r(t)$

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi \quad (2.21)$$

называется *резистивной (активной) мощностью* цепи, а амплитуда $p_x(t)$

$$Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \quad (2.22)$$

называется *реактивной мощностью* цепи.

Временные диаграммы для мгновенной резистивной и реактивной мощности цепи приведены на рис. 2.12.

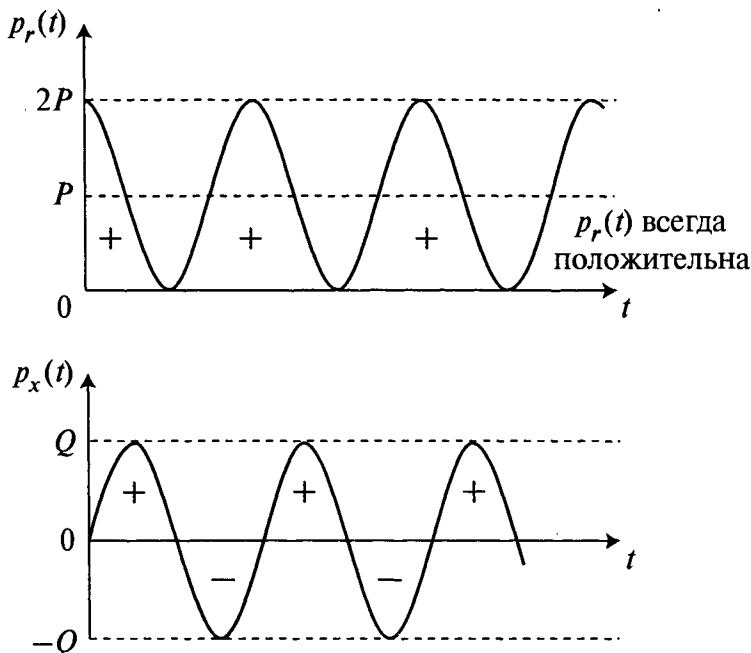


Рис. 2.12

Полной мощностью двухполюсника (цепи) называют величину

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{I_m^2 Z}{2} = UI = I^2 Z, \quad (2.23)$$

где Z — модуль сопротивления цепи (двухполюсника); U, I — эффективные (действующие) значения напряжения и тока в цепи [см. (2.10)].

Взаимосвязь резистивной P , реактивной Q и полной S мощностей образует на комплексной плоскости треугольник (рис. 2.13, а), аналогичный треугольнику сопротивлений (рис. 2.13, б).

Из треугольника сопротивлений следует:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R}.$$

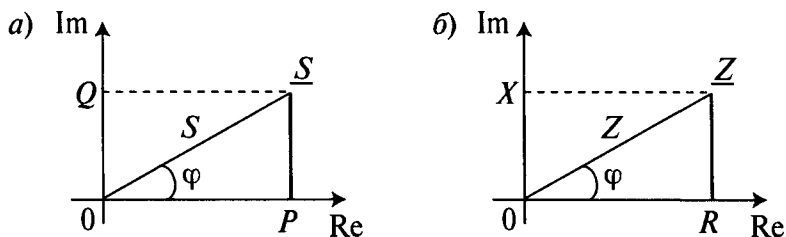


Рис. 2.13

Тогда из треугольника мощностей получим:

$$\begin{aligned}
 P &= S \cos \varphi = \frac{I_m^2 Z}{2} \frac{R}{Z} = \frac{I_m^2 R}{2} = I^2 R; \\
 Q &= S \sin \varphi = \frac{I_m^2 Z}{2} \frac{X}{Z} = \frac{I_m^2 X}{2} = I^2 X.
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Величину $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$ называют **коэффициентом мощности** цепи, так как она характеризует отношение *полезной резистивной мощности* к *полной мощности* цепи, и используют как один из основных параметров цепей энергопередачи, а $\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{Q}{P}$ — **добротностью** цепи, так как она характеризует отношение *реактивной и резистивной мощностей*, т.е. резонансные свойства цепи, и используют как один из основных параметров цепей электросвязи.

Аналогично комплексному сопротивлению \underline{Z} по известным координатам на комплексной плоскости P и Q может быть определена **комплексная мощность** \underline{S} цепи:

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= P + jQ = S(\cos \varphi + j \sin \varphi) = S \exp(j\varphi) = \\
 &= S \exp[j(\psi_{0u} - \psi_{0i})] = \frac{U_m I_m}{2} \exp(j\psi_{0u}) \exp(-j\psi_{0i}) = \\
 &= \frac{U_m \exp(j\psi_{0u}) I_m \exp(-j\psi_{0i})}{2} = \\
 &= \frac{U_m \underline{I}_m^*}{2} = \frac{I_m^2 \underline{Z}}{2} = I^2 \underline{Z},
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

где \underline{I}_m^* — величина, комплексно-сопряженная с \underline{I}_m , т.е. если $\underline{I}_m = I_m \exp(j\psi_{0i})$, то $\underline{I}_m^* = I_m \exp(-j\psi_{0i})$, причем $\underline{I}_m \underline{I}_m^* = I_m^2$, $\underline{I} \cdot \underline{I}^* = I^2$.

Размерности различных видов мощностей:

S и \underline{S} — вольт-амперы (ВА);

Q — вольт-амперы реактивные (ВАр);

P — ватты (Вт).

Для активных ЭЦ, в соответствии с законом сохранения энергии, в любой момент времени должен сохраняться **баланс мощностей**, т.е. равенство комплексных мощностей всех источников и комплексных мощностей всех потребителей (пассивных элементов). Так, при использовании действующих значений токов и напряжений *баланс мощностей* в произвольной активной ЭЦ, содержащей N источников напряжения, M источников тока и K пассивных элементов, примет вид

$$\sum_{i=1}^N \underline{E}_i \underline{I}_i^* + \sum_{i=1}^M \underline{U}_i \underline{I}_i^* = \sum_{i=1}^K I_i^2 \underline{Z}_i. \quad (2.26)$$

2.3.2. Согласование источника электрической энергии с нагрузкой

Согласовать источник электрической энергии с нагрузкой — значит выбрать такое сопротивление нагрузки \underline{Z}_H , чтобы обеспечить:

- **максимум резистивной мощности в нагрузке P_H** , что важно для цепей электросвязи, в которых мощности сигналов малы, так как при отсутствии согласования источника сигнала и нагрузки маломощные сигналы могут затеряться в электрических помехах;
- **максимум коэффициента полезного действия (КПД)**

$\eta = \frac{P_H}{P}$, что важно в цепях энергопередачи, в которых стремятся обеспечить минимальные потери полезной активной мощности при передаче большой энергии.

Рассмотрим условия согласования источника напряжения с комплексной нагрузкой (рис. 2.14).

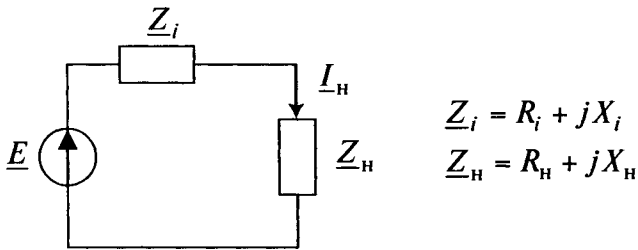


Рис. 2.14

По закону Ома комплексное действующее значение тока в нагрузке

$$\underline{I}_H = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_H} = \frac{\underline{E}}{(R_i + R_H) + j(X_i + X_H)},$$

тогда согласно (2.24) резистивная мощность в нагрузке

$$P_H = I_H^2 R_H = \underline{I}_H \underline{I}_H^* R_H = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}.$$

Максимум мощности в нагрузке достигается при выполнении двух условий:

$$1) X_H = -X_i; \quad 2) R_H = R_i,$$

т.е. при $R_H + jX_H = R_i - jX_i$, или, иначе,

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_i^*. \quad (2.27)$$

Вывод. Согласование источника электрической энергии с комплексной нагрузкой по критерию максимума резистивной мощности в нагрузке обеспечивается выбором такой нагрузки, которая была бы комплексно-сопряженной с внутренним сопротивлением источника, при этом максимальная резистивная мощность в нагрузке

$$\max P_H = \frac{E^2}{4R_H} = \frac{E_m^2}{8R_H}. \quad (2.28)$$

Для схемы соединения источника с нагрузкой потери резистивной мощности происходят на резистивном внутреннем сопротивлении R_i , т.е. КПД (коэффициент полезного использования резистивной мощности источника)

$$\eta = \frac{P_H}{P_H + P_i} = \frac{I_H^2 R_H}{I_H^2 (R_H + R_i)} = \frac{R_H}{R_H + R_i}. \quad (2.29)$$

Графики зависимостей нормированной резистивной мощности в нагрузке P_H и КПД от величины резистивного сопротивления нагрузки (при $X_i = X_H = 0$) приведены на рис. 2.15.

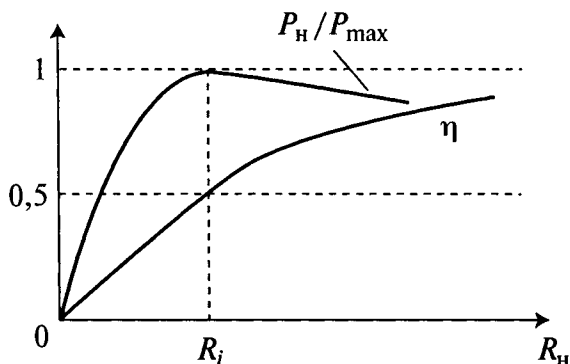


Рис. 2.15

Вывод. Условия для получения максимумов активной мощности в нагрузке и КПД не совпадают. В цепях электросвязи стремятся обеспечить $R_H = R_i$, в цепях энергопередачи $R_H \rightarrow \infty$.

Аналогично можно показать, что для согласования источника тока с нагрузкой требуется обеспечить выполнение того же условия (2.27).

2.4. Индуктивно связанные электрические цепи

2.4.1. Параметры индуктивной связи

При протекании переменного тока I через катушку индуктивности с числом витков w и сердечником (магнитопроводом) длиной λ вокруг нее и внутри

магнитопровода возникает *магнитное поле*, которое характеризуется основными параметрами:

- *магнитодвижущая сила* (МДС): Iw , измеряется в ампер-витках; МДС аналогична ЭДС в электрических цепях;
- *напряженность магнитного поля* H — отношение МДС к длине магнитопровода λ , измеряется в амперах на метр (А/м); произведение $H\lambda$ есть *магнитное напряжение*;
- *магнитная индукция* $B = \mu_a H$ — интенсивность магнитного поля (μ_a — абсолютная магнитная проницаемость магнитопровода), измеряется в теслах (Тл);
- *магнитный поток* $\Phi = BS$ (S — сечение магнитопровода), измеряется в веберах (Вб);
- *потокосцепление* $\psi = w\Phi$;
- *индуктивность самоиндукции* L , измеряется в генри (Гн),

$$L = \frac{d\Psi}{dI} = w \frac{d\Phi}{dI}. \quad (2.30)$$

По закону Фарадея—Максвелла и правилу Ленца в такой катушке возникает ЭДС самоиндукции:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.31)$$

Для магнитной цепи, состоящей из n последовательных участков (по аналогии со вторым законом Кирхгофа для электрической цепи), формулируется **закон полного тока**: *МДС магнитной цепи равна сумме магнитных напряжений на последовательных участках этой цепи*, т.е.

$$wI = \sum_{i=1}^n H_i \lambda_i.$$

Кроме того, в магнитной цепи (аналогично закону Ома для электрической цепи)

$$\Phi = BS = \mu_a HS \frac{\lambda}{\lambda} = \frac{H\lambda}{\lambda/(\mu_a S)},$$

т.е. величина «магнитного сопротивления» $\frac{\lambda}{\mu_a S}$ анало-

гична величине электрического сопротивления $\frac{\lambda}{g S}$, где

g — удельная электрическая проводимость проводника.

Следовательно, магнитный поток Φ аналогичен электрическому току I .

2.4.2. Анализ индуктивно связанных цепей

При наличии в непосредственной близости от катушки индуктивности другой катушки в последней, благодаря индукции, будет возникать ЭДС взаимоиндукции, определяемая по закону Фарадея — Максвелла, т.е. между катушками установится индуктивная связь.

Рассмотрим параметры такой индуктивной связи.

Пусть имеются расположенные в непосредственной близости друг от друга две катушки индуктивности с числом витков w_1 и w_2 соответственно.

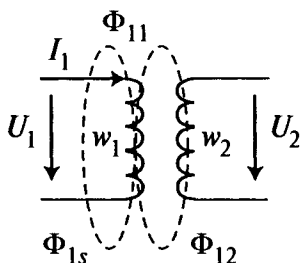


Рис. 2.16

При подключении первой катушки к источнику в ней создается магнитный поток Φ_{11} , состоящий из потока рассеяния Φ_{1s} и потока взаимоиндукции Φ_{12} , охватывающего витки второй катушки (рис. 2.16).

В такой схеме имеется **три вида потокосцепления**:

- потокосцепление самоиндукции $\psi_{11} = w_1 \Phi_{11}$;
- потокосцепление рассеяния $\psi_{1s} = w_1 \Phi_{1s}$;
- потокосцепление взаимоиндукции $\psi_{12} = w_2 \Phi_{12}$.

Тогда согласно (2.30) получим **три вида индуктивностей**:

- индуктивность самоиндукции

$$L_1 = \frac{d\Psi_{11}}{dI_1} = w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dI_1};$$

- индуктивность рассеяния

$$L_{1s} = \frac{d\Psi_{1s}}{dI_1} = w_1 \frac{d\Phi_{1s}}{dI_1};$$

- индуктивность взаимоиндукции

$$M_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{dI_1} = w_2 \frac{d\Phi_{12}}{dI_1}.$$

Для катушек с линейной индуктивностью

$$L_1 \approx w_1 \frac{\Phi_{11}}{I_1}; \quad L_{1s} \approx w_1 \frac{\Phi_{1s}}{I_1}; \quad M_{12} \approx w_2 \frac{\Phi_{12}}{I_1}. \quad (2.32)$$

Аналогично при подключении второй катушки к источнику получим:

$$L_2 \approx w_2 \frac{\Phi_{22}}{I_2}; \quad L_{2s} \approx w_2 \frac{\Phi_{2s}}{I_2}; \quad M_{21} \approx w_1 \frac{\Phi_{21}}{I_2}.$$

Согласно принципу взаимности $M_{12} = M_{21} = M$.

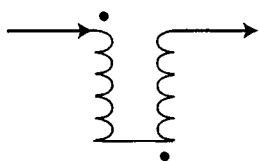
При подключении первой катушки к источнику, а второй к нагрузке в них потекут токи I_1 и I_2 соответственно, что создаст общее потокоцепление в катушках:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21} = w_1 \Phi_{11} \pm w_1 \Phi_{21};$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12} = w_2 \Phi_{22} \pm w_2 \Phi_{12}$$

соответственно, причем знак «+» ставится при согласном включении катушек (рис. 2.17, а) и знак «-» при встречном включении катушек (рис. 2.17, б). Начала катушек (одноименные зажимы) принято обозначать точками.

а) Согласное включение



б) Встречное включение

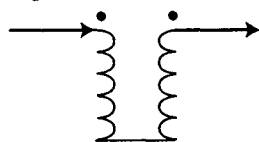


Рис. 2.17

Поскольку напряжение на каждой катушке равно по величине (при отсутствии потерь на резистивных элементах) и противоположно по знаку ЭДС, то с учетом (2.31) получим

$$U_1 = -E_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt} \approx \frac{w_1 d\Phi_{11}}{dt} \frac{dI_1}{dI_1} \pm \frac{w_1 d\Phi_{21}}{dt} \frac{dI_2}{dI_2},$$

т.е. с учетом (2.32)

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} = U_{11} \pm U_{M1}.$$

Аналогично

$$U_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt} = U_{22} \pm U_{M2}.$$

Здесь U_{M1} и U_{M2} — вносимые напряжения в одной катушке с током за счет влияния на нее другой катушки с током. Знак вносимых напряжений зависит от направления намотки витков катушек. При одинаковой намотке катушек, т.е. при согласном включении, вносимые напряжения складываются с собственными напряжениями катушек.

Степень связи двух индуктивно связанных катушек оценивается *коэффициентом индуктивной связи*

$$K_M = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}}}.$$

Тогда с учетом (2.32) получим

$$K_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (2.33)$$

Значение K_M изменяется от 0 (отсутствие связи между катушками) до 1 (жесткая связь катушек). Иногда степень связи оценивают *коэффициентом рассеяния*

$$\delta^2 = 1 - K_M^2.$$

2.4.3. Вариометры и трансформаторы

Рассмотрим символический анализ последовательного согласного соединения индуктивно связанных катушек с собственными сопротивлениями потерь (рис. 2.18).

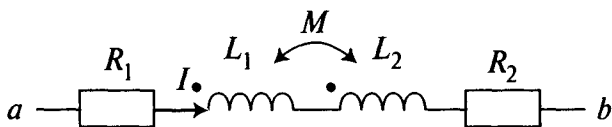


Рис. 2.18

При согласном включении катушек по второму закону Кирхгофа для комплексных амплитуд тока и напряжений получим

$$\underline{U}_{ab} = (R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2) \underline{I} + 2j\omega M \underline{I}.$$

Комплексное сопротивление такой цепи

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{U}_{ab} / \underline{I} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M),$$

тогда величина эквивалентной индуктивности при согласном включении

$$L_{ab} = L_1 + L_2 + 2M. \quad (2.34)$$

Аналогично при встречном включении

$$L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Если между двумя последовательно соединенными индуктивно связанными катушками обеспечить возможность вращения одной из катушек относительно другой, то получим устройство переменной индуктивности, называемое **вариометром**, индуктивность которого определяется выражением

$$L_{ab} = L_1 + L_2 + 2M \cos \alpha, \quad (2.35)$$

где α — угол поворота между осями катушек.

Индуктивно связанные катушки без потерь при коэффициенте индуктивной связи $K_M = 1$ называют **совершенным трансформатором**.

Полная взаимосвязь катушек ($M^2 = L_1 L_2$) достигается при отсутствии потоков рассеяния, т.е. при $\Phi_{1s} = \Phi_{2s} = 0$.

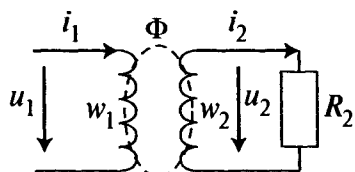


Рис. 2.19

При бесконечно больших индуктивностях катушек трансформатор называют *идеальным* (рис. 2.19).

Тогда $\Phi_{11} = \Phi_{12}$ и $\Phi_{22} = \Phi_{21}$, т.е. $\Phi_{11} + \Phi_{21} = \Phi_{22} + \Phi_{12} = \Phi$.

Следовательно, $\Psi_1 = w_1 \Phi$ и $\Psi_2 = w_2 \Phi$.

Поскольку

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = w_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = w_2 \frac{d\Phi}{dt},$$

то отношение напряжений, равное отношению числа витков вторичной и первичной катушек $\frac{u_2}{u_1} = \frac{w_2}{w_1} = n$, называют *коэффициентом трансформации*.

Отсутствие потерь в трансформаторе выражается в равенстве мгновенных мощностей в каждой из катушек: $u_1 i_1 = u_2 i_2$, т.е.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{i_1}{i_2} = n. \quad (2.36)$$

Если $n > 1$, то трансформатор называют *повышающим*, так как $u_2 > u_1$, а если $n < 1$, то *понижающим*, так как $u_2 < u_1$.

Повышение напряжения с помощью трансформаторов используется в линиях электропередачи (ЛЭП) для соответствующего снижения величины тока в линии и тем самым для снижения необходимой площади поперечного сечения проводов ЛЭП.

Отношение $\frac{u_1}{i_1}$ является входным сопротивлением

трансформатора $R_{вх}$, а отношение $\frac{u_2}{i_2}$ равно сопротивлению нагрузки R_2 . Тогда из (2.36) получим

$$R_{\text{вх}} = \frac{u_1}{i_1} = \frac{u_2/n}{i_2 n} = \frac{R_2}{n^2}. \quad (2.37)$$

Таким образом, трансформатор преобразует не только величины напряжения и тока, но и величины сопротивления нагрузки, т.е. является *трансформатором (конвертором) сопротивлений*, что широко используется на практике для обеспечения согласования источника и нагрузки, например выходного сопротивления усилителя и сопротивления громкоговорителя (телефона).

Реальный трансформатор (трансформатор с потерями) приближается к совершенному при намотке катушек на сердечник из магнитомягкого материала, обеспечивающего концентрацию магнитного потока в сердечнике и практическое отсутствие потока рассеяния, но при этом появляются дополнительные потери на гистерезис и вихревые токи в сердечнике.

Если пренебречь потерями в сердечнике, то схема замещения реального трансформатора примет вид, приведенный на рис. 2.20.

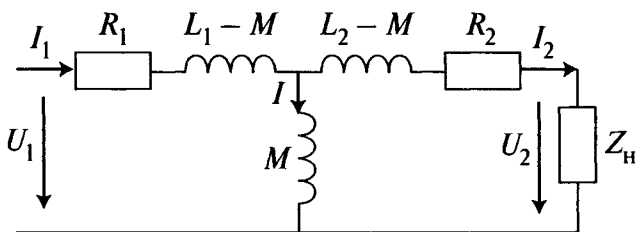


Рис. 2.20

Для двух контуров этой схемы уравнения по методу контурных токов в символической форме имеют вид

$$\underline{I}_1 \underline{Z}_{11} - \underline{I}_2 \underline{Z}_{12} = \underline{U}_1; \quad -\underline{I}_1 \underline{Z}_{21} + \underline{I}_2 \underline{Z}_{22} = 0,$$

где $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_M = j\omega M$; $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_M$;
 $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_M + \underline{Z}_H$; $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M)$;
 $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M)$.

Тогда $\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22}}$; $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{11} - \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}}$.

Входное сопротивление трансформатора

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{\text{вн1}}, \quad (2.38)$$

где $\underline{Z}_{\text{вн1}} = -\frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}}$ — «вносимое сопротивление» из второго контура в первый.

Аналогично $\underline{Z}_{\text{вн2}} = -\frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{11}}$ — «вносимое сопротивление» из первого контура во второй.

Величина токов в контурах:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}}; \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{I}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}} \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22}} = \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_M}{\left(\underline{Z}_{11} - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}}\right) \underline{Z}_{22}} = \\ &= \frac{\underline{U}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_M^2} = \frac{\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11}}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{\text{вн2}}}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Числитель $\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11}} = \underline{U}_{\text{вн2}}$ есть вносимое напряжение

из первого контура во второй, т.е. $\underline{K} = \frac{\underline{U}_{\text{вн2}}}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11}}$ — *комплексный коэффициент передачи*.

При отсутствии потерь $K = \frac{M}{L_1}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Формы представления ГВ и их взаимосвязь.
2. Мощность резистивного элемента.
3. Сущность понятия «реактивный элемент».
4. Параметры и формы представления комплексного сопротивления.
5. Параметры комплексной проводимости и формы ее представления.
6. Условия резонансов напряжений и токов и их особенности.
7. Составляющие мгновенной мощности электрической цепи.
8. Виды мощностей цепи.
9. Понятие коэффициента мощности и добротности цепи.
10. Сущность баланса мощностей в активной цепи.
11. Условия согласования для цепей электросвязи и для цепей энергопередачи.
12. Виды индуктивностей при индуктивной связи.
13. Параметры оценки степени индуктивной связи.
14. Свойства вариометра.
15. Свойства идеального трансформатора.
16. Особенности реального трансформатора.
17. Сущность «вносимого сопротивления».

Тема 3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3.1. Частотные характеристики апериодических цепей

3.1.1. Частотные характеристики апериодических цепей первого порядка (билинов)

Для описания свойств электрических цепей используют различные характеристики или функции, понимая под ними обычно отношение отклика к воздействию. Так, при гармоническом воздействии различной частоты применяют частотные характеристики.

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) есть частотная зависимость отношения комплексной амплитуды отклика к комплексной амплитуде воздействия:

$$H(j\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \exp[j(\psi_{02} - \psi_{01})] = H(\omega) \exp[j\psi(\omega)]. \quad (3.1)$$

Здесь $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ — модуль КЧХ, который называют

амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) электрической цепи, а $\psi(\omega) = (\psi_{02} - \psi_{01})$ — аргумент КЧХ, который называют *фазочастотной характеристикой (ФЧХ)* электрической цепи.

Частотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) электрической цепи характеризуют ее способность к передаче от входа к выходу амплитуды и фазы гармонических воздействий различной частоты.

Для двухполюсников отношение отклика к воздействию рассматривается на одной паре полюсов, поэтому для них существуют *входные* КЧХ $Z(j\omega)$ или $Y(j\omega)$ с размерностью сопротивления или проводимости.

Для четырехполюсников существуют *входные, выходные и передаточные КЧХ*.

Апериодическими цепями первого порядка (АПЦ-1) называют электрические цепи, содержащие только один реактивный элемент, т.е. динамические свойства АПЦ-1 описываются дифференциальным уравнением первого порядка для текущих комплексов воздействия и отклика:

$$a_1 \frac{d\underline{v}_1}{dt} + a_0 \underline{v}_1 = b_1 \frac{d\underline{v}_2}{dt} + b_0 \underline{v}_2,$$

где \underline{v}_1 и \underline{v}_2 — текущие комплексы воздействия и отклика соответственно.

С учетом свойства текущих комплексов (2.6) из дифференциального уравнения получим алгебраическое:

$$a_1 j\omega \underline{v}_1 + a_0 \underline{v}_1 = b_1 j\omega \underline{v}_2 + b_0 \underline{v}_2,$$

тогда отношение текущих комплексов отклика к воздействию есть отношение их комплексных амплитуд, т.е. КЧХ:

$$\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{V_2}{V_1} = H(j\omega) = \frac{a_0 + j\omega a_1}{b_0 + j\omega b_1}. \quad (3.2)$$

Поскольку (3.2) есть отношение двух линейных полиномов с аргументом ω , то АПЦ-1 можно назвать *билином* («би» означает два).

Модуль КЧХ (т.е. АЧХ) билинов

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{a_0^2 + \omega^2 a_1^2}}{\sqrt{b_0^2 + \omega^2 b_1^2}}. \quad (3.3)$$

Аргумент КЧХ (т.е. ФЧХ) билинов

$$\psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega a_1}{a_0}\right) - \arctg\left(\frac{\omega b_1}{b_0}\right). \quad (3.4)$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $a_1 = 0$. Тогда из (3.2)–(3.4) получим:

$$\text{КЧХ: } H(j\omega) = \frac{a_0}{b_0 + j\omega b_1} = \frac{\frac{a_0}{b_0}}{1 + j\omega \frac{b_1}{b_0}} = \frac{H(0)}{1 + j\omega\tau}, \quad (3.5)$$

где $H(0) = H(\omega = 0) = \frac{a_0}{b_0}$; $\tau = \frac{b_1}{b_0}$ — постоянная времени цепи;

$$\text{АЧХ: } H(\omega) = \frac{H(0)}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}};$$

$$\text{ФЧХ: } \psi(\omega) = -\text{arctg}(\omega\tau).$$

Построим графики для АЧХ и ФЧХ АПЦ-1 при $a_1 = 0$ (рис. 3.1).

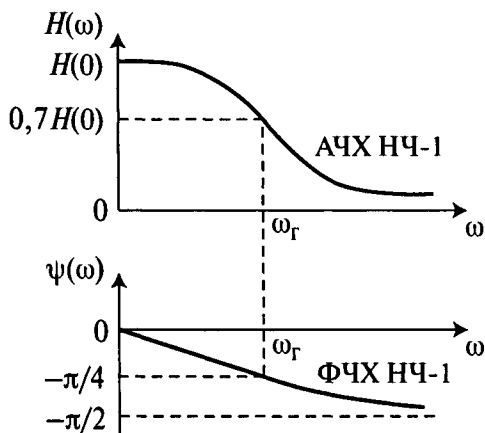


Рис. 3.1

Частоту $\omega_r = \frac{1}{\tau}$, на которой $H(\omega_r) = \frac{H(0)}{\sqrt{2}} = 0,707 H(0)$,

называют *граничной частотой* полосы пропускания АПЦ-1, т.е. полосы частот, где значение $H(\omega)$ максимально. По положению полосы пропускания в области низких частот ($0 \div \omega_r$) такую АПЦ-1 называют *низкочастотным звеном* (НЧ-1).

К числу пассивных звеньев НЧ-1 относятся:

а) звено типа RC (рис. 3.2).

КЧХ такого звена:

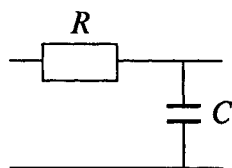


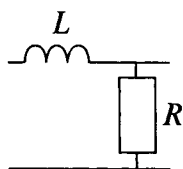
Рис. 3.2

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

что совпадает с (3.5) при $H(0) = 1$ и $\tau = RC$.

Такое звено часто используют в качестве простейшего сглаживающего фильтра или звена интегрирующей цепи;

б) звено типа LR (рис. 3.3).



КЧХ такого звена:

$$H(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}},$$

Рис. 3.3 что совпадает с (3.5) при $H(0) = 1$ и $\tau = L/R$.

2. Пусть $a_0 = 0$. Тогда из (3.2)–(3.4) получим:

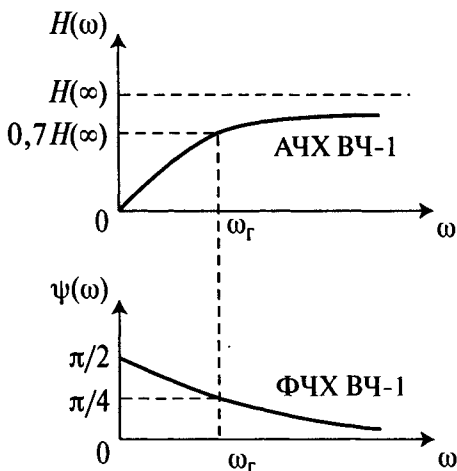
$$\text{КЧХ: } H(j\omega) = \frac{j\omega a_1}{b_0 + j\omega b_1} = \frac{j\omega \frac{a_1}{b_0} \frac{b_1}{b_1}}{1 + j\omega \frac{b_1}{b_0}} = \frac{j\omega \tau H(\infty)}{1 + j\omega \tau}, \quad (3.6)$$

где $H(\infty) = H(\omega = \infty) = \frac{a_1}{b_1}$; $\tau = \frac{b_1}{b_0}$ — постоянная времени цепи;

$$\text{АЧХ: } H(\omega) = \frac{\omega \tau H(\infty)}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}};$$

$$\text{ФЧХ: } \psi(\omega) = 90^\circ - \text{arctg}(\omega \tau).$$

Построим графики для АЧХ и ФЧХ АПЦ-1 при $a_0 = 0$ (рис. 3.4).

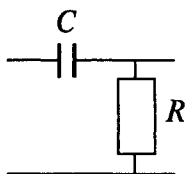


Частоту $\omega_r = \frac{1}{\tau}$, на которой $H(\omega_r) = \frac{H(\infty)}{\sqrt{2}} = 0,707 H(\infty)$, называют **граничной частотой** полосы пропускания АПЦ-1, т.е. полосы частот, где значение $H(\omega)$ максимально. По положению полосы пропускания в области высоких частот ($\omega_r \div \infty$) такую АПЦ-1 называют **высокочастотным звеном** (ВЧ-1).

К числу пассивных звеньев ВЧ-1 относятся:

а) звено типа RC (рис. 3.5).

КЧХ такого звена:



$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC},$$

Рис. 3.5

что совпадает с (3.6) при $H(\infty) = 1$ и $\tau = RC$.

Такое звено часто используют в качестве переходной цепи между каскадами усилителей или в качестве звена дифференцирующей цепи;

б) звено типа LR (рис. 3.6):
КЧХ такого звена:

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}},$$

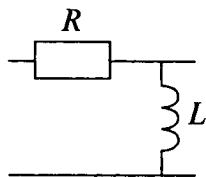
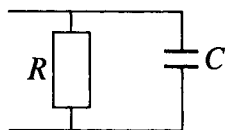


Рис. 3.6

что совпадает с (3.6) при $H(\infty) = 1$ и $\tau = L/R$.

Двухполюсники АПЦ-1 также подразделяются на *низкочастотные* (рис. 3.7) и *высокочастотные* (рис. 3.8) звенья (НЧ-1 и ВЧ-1).

а)



$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{R}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC$$

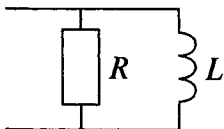
б)



$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{\frac{1}{R}}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = L/R$$

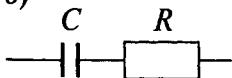
Рис. 3.7

а)



$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = L/R$$

б)



$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega\tau}, \quad \tau = RC$$

Рис. 3.8

3.1.2. Частотные характеристики апериодических цепей второго порядка (биквадов)

Апериодическими цепями второго порядка (АПЦ-2) называют электрические цепи, содержащие два реактивных элемента (причем для цепи, содержащей L и C , должно выполняться условие апериодичности), т.е. динамические свойства АПЦ-2 описываются дифференциальным уравнением второго порядка для текущих комплексов воздействия и отклика:

$$a_2 \frac{d\underline{v}_1^2}{dt^2} + a_1 \frac{d\underline{v}_1}{dt} + a_0 \underline{v}_1 = b_2 \frac{d\underline{v}_2^2}{dt^2} + b_1 \frac{d\underline{v}_2}{dt} + b_0 \underline{v}_2.$$

С учетом свойства текущих комплексов (2.6) из дифференциального уравнения получим алгебраическое:

$$a_2 (j\omega)^2 \underline{v}_1 + a_1 j\omega \underline{v}_1 + a_0 \underline{v}_1 = b_2 (j\omega)^2 \underline{v}_2 + b_1 j\omega \underline{v}_2 + b_0 \underline{v}_2,$$

тогда отношение текущих комплексов отклика к воздействию есть отношение их комплексных амплитуд, т.е. КЧХ:

$$\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{V_2}{V_1} = H(j\omega) = \frac{a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1}{b_0 - \omega^2 b_2 + j\omega b_1}. \quad (3.7)$$

Поскольку (3.7) есть отношение двух квадратных полиномов с аргументом ω , то АПЦ-2 называют **биквадом**.

Модуль КЧХ (т.е. АЧХ) биквадов

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{(a_0 - \omega^2 a_2)^2 + \omega^2 a_1^2}}{\sqrt{(b_0 - \omega^2 b_2)^2 + \omega^2 b_1^2}}. \quad (3.8)$$

Аргумент КЧХ (т.е. ФЧХ) биквадов

$$\psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega a_1}{a_0 - \omega^2 a_2}\right) - \arctg\left(\frac{\omega b_1}{b_0 - \omega^2 b_2}\right). \quad (3.9)$$

Часто для удобства анализа КЧХ ее коэффициенты обозначают следующим образом:

$$b_2 = 1; \quad b_1 = 2\sigma; \quad b_0 = \omega_0^2$$

и КЧХ представляют в виде

$$H(j\omega) = \frac{a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot 2\sigma}. \quad (3.10)$$

Тогда характеристическое уравнение является полиномом вида

$$s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0. \quad (3.11)$$

Отношение $\frac{\omega_0}{2\sigma} = Q$ называется *добротностью цепи*.

Корни характеристического уравнения

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} \quad (3.12)$$

«характеризуют» свойства цепи.

При $\sigma \geq \omega_0$ корни $s_{1,2}$ являются действительными числами, что обеспечивает *апериодический (монотонный)* характер электрических процессов, т.е. цепь является апериодической, при этом добротность

$$Q = \frac{\omega_0}{2\sigma} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.13)$$

что и является **условием апериодичности** цепей второго порядка с дуальными элементами в ветвях.

При $\sigma < \omega_0$ корни $s_{1,2}$ являются комплексными числами, что обеспечивает *колебательный* характер электрических процессов в цепи с собственной частотой

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}.$$

Рассмотрим теперь частные случаи выражения (3.10).

1. При $a_2 = a_1 = 0$

$$H(j\omega) = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot 2\sigma}. \quad (3.14)$$

График АЧХ такой цепи аналогичен графику АЧХ звена НЧ-1 (см. рис. 3.1), поэтому такая АПЦ-2 называется *низкочастотным звеном* (НЧ-2), при этом $H(0) = \frac{a_0}{\omega_0^2}$ и граничная частота определяется из условия $H(\omega_r) = 0,707H(0)$.

2. При $a_1 = a_0 = 0$

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 a_2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot 2\sigma}. \quad (3.15)$$

График АЧХ такой цепи аналогичен графику АЧХ звена ВЧ-1 (см. рис. 3.4), поэтому такая АПЦ-2 называется *высокочастотным звеном* (ВЧ-2), при этом $H(\infty) = a_2$ и граничная частота определяется из условия $H(\omega_r) = 0,707H(\infty)$.

3. При $a_2 = a_0 = 0$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega a_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \cdot 2\sigma}. \quad (3.16)$$

График такой АЧХ приведен на рис. 3.9.

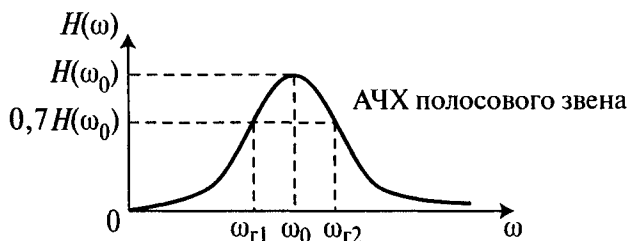


Рис. 3.9

Такая АПЦ-2 называется *полосовым звеном*, для которого $H(\omega_0) = \frac{a_1}{2\sigma}$ и граничные частоты полосы пропускания ω_{r1} и ω_{r2} определяются из условия $H(\omega_r) = 0,707H(\omega_0)$.

Для всех звеньев полоса пропускания определяется на уровне 0,7 от максимального значения АЧХ.

3.2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура

3.2.1. Основные параметры последовательного колебательного контура, влияние сопротивления источника и нагрузки

Последовательный колебательный контур (ПСК) — это биквад с последовательно соединенными дуальными реактивными элементами (L и C) и сопротивлением потерь R , для которого условие апериодичности (3.13) не выполняется, т.е. ПСК является колебательной (резонансной) цепью (рис. 3.10).

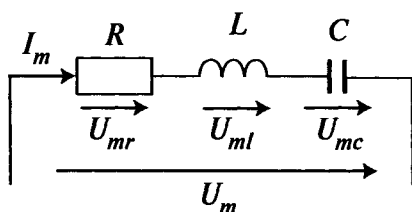


Рис. 3.10

Как отмечалось в 2.2.3, в такой ЭЦ имеет место *резонанс напряжений* на *резонансной частоте* $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, при котором реактивное сопротивление ЭЦ равно нулю: $X(\omega_0) = X_l(\omega_0) + X_c(\omega_0) = 0$, т.е.

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (3.17)$$

где ρ — сопротивление реактивного элемента на резонансной частоте, которое называют *волновым сопротивлением* ПСК, Ом.

Волновое сопротивление ПСК зависит только от параметров L и C , т.е., так же как и резонансная частота, является параметром ПСК, причем $\rho \gg R$.

Для оценки динамических свойств ПСК составим дифференциальное уравнение электрического равновесия

для этой цепи по второму закону Кирхгофа с учетом (1.1), (1.4) и (1.10):

$$\underline{U}_{mr} + \underline{U}_{ml} + \underline{U}_{mc} = \underline{U}_m;$$

$$\underline{I}_m R + L \frac{d\underline{I}_m}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t \underline{I}_m dt = \underline{U}_m.$$

Продифференцировав по времени и разделив на L , получим

$$\frac{d^2 \underline{I}_m}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\underline{I}_m}{dt} + \frac{1}{LC} \underline{I}_m = \frac{1}{L} \frac{d\underline{U}_m}{dt}. \quad (3.18)$$

Характеристическое уравнение для (3.18) имеет следующий вид:

$$s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0,$$

где

$$2\sigma = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (3.19)$$

Корни характеристического уравнения при $\sigma \ll \omega_0$

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} = -\sigma \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \sigma^2)} = -\sigma \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$ — собственная частота ПСК.

Корни характеристического уравнения ПСК являются комплексными, что определяет *колебательный* характер динамических процессов.

Основным параметром ПСК (кроме R , L , C , ω_0 и ρ) является также *добротность* ПСК:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\sigma} = \frac{1}{R/L} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R}. \quad (3.20)$$

Подключение сопротивлений источника и нагрузки (рис. 3.11) увеличивает общее сопротивление потерь ПСК:

$$R_0 = R_1 + R + R'_H, \text{ где } R'_H = \frac{\rho^2}{R_H}. \quad (3.21)$$

Здесь R'_H — пересчитанное последовательно включенное сопротивление нагрузки.

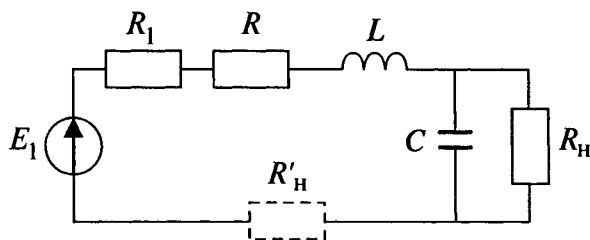


Рис. 3.11

Тогда эквивалентная добротность ПСК: $Q' < \frac{\rho}{R_0} < Q$.

Таким образом, подключение к ПСК реального источника (тока или напряжения) или нагрузки снижает добротность ПСК.

Обоснуем справедливость (3.21). Для этого из условия эквивалентности преобразования цепей (рис. 3.12) получим

$$\underline{Y} = G_{\text{пр}} + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_{\text{пс}} - jX'}.$$

При резонансе

$$\frac{1}{R_{\text{пр}}} + j\rho = \frac{1}{R_{\text{пс}} - j\rho} \frac{R_{\text{пс}} + j\rho}{R_{\text{пс}} + j\rho} = \frac{R_{\text{пс}}}{R_{\text{пс}}^2 + \rho^2} + j \frac{\rho}{R_{\text{пс}}^2 + \rho^2}.$$

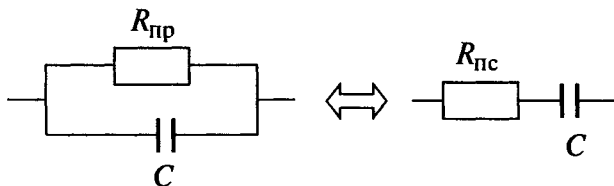


Рис. 3.12

Так как сопротивление потерь ПСК $R_{\text{пс}} \ll \rho$, то

$$\frac{1}{R_{\text{пр}}} \approx \frac{R_{\text{пс}}}{\rho^2}.$$

Следовательно, $R_{\text{пр}} \approx \frac{\rho^2}{R_{\text{пс}}}$ и, наоборот, $R_{\text{пс}} \approx \frac{\rho^2}{R_{\text{пр}}}$.

3.2.2. Входные частотные характеристики ПСК

Входной частотной характеристикой ПСК является частотная зависимость его входного комплексного сопротивления:

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX_{\text{вх}},$$

где $X_{\text{вх}} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — входное реактивное сопротивление ПСК;

$Z_{\text{вх}} = \sqrt{R^2 + X_{\text{вх}}^2}$ — модуль входного сопротивления (входная АЧХ);

$\varphi_{\text{вх}} = \arctg\left(\frac{X_{\text{вх}}}{R}\right)$ — аргумент входного сопротивления (входная ФЧХ).

При резонансе напряжений $X_{\text{вх}}(\omega_0) = 0$, т.е. $Z_{\text{вх}}(\omega_0) = R$ и $\varphi_{\text{вх}}(\omega_0) = 0$.

Таким образом, входное сопротивление ПСК на резонансной частоте ω_0 является *чисто резистивным* и равно R .

Отклонение частоты источника воздействия от резонансной частоты ПСК называют *абсолютной расстройкой*: $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$, а отношение $\Delta\omega/\omega_0$ — *относительной расстройкой*.

Для удобства анализа ПСК вводят понятие *обобщенной расстройки*:

$$\xi = \frac{X_{\text{ВХ}}}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) =$$

$$= Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0 \omega} \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (3.22)$$

При резонансе $\Delta\omega = 0$ и $\xi = 0$.

Тогда выражение для входного сопротивления примет следующий вид:

$$Z_{\text{ВХ}}(j\omega) = R \left(1 + j \frac{X_{\text{ВХ}}}{R} \right) = R(1 + j\xi), \quad (3.23)$$

где $Z_{\text{ВХ}} = R\sqrt{1 + \xi^2}$; $\varphi_{\text{ВХ}} = \arctg \xi$.

Графики входных АЧХ и ФЧХ ПСК приведены на рис. 3.13.

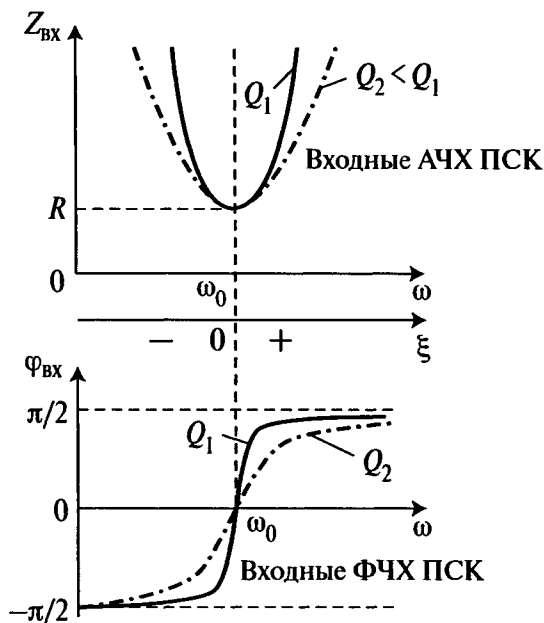


Рис. 3.13

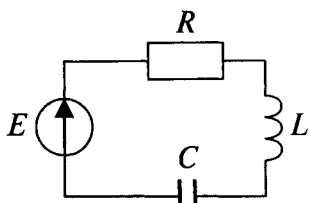


Рис. 3.14

При подключении ПСК к идеальному источнику напряжения E (рис. 3.14) модуль тока I в ПСК равен

$$I = \frac{E}{R\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (3.24)$$

На практике используют частотную зависимость модуля тока ПСК, называемую *входной резонансной характеристикой* ПСК (рис. 3.15).

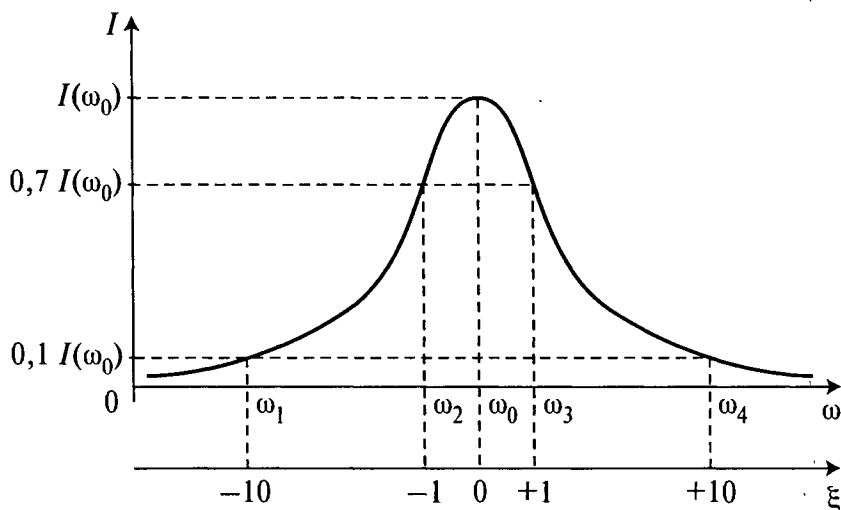


Рис. 3.15

На уровне $0,7$ от максимального значения тока $I(\omega_0)$ определяется *полоса пропускания* ПСК шириной $\Delta\omega_{\text{п}} = \omega_3 - \omega_2$, а на уровне $0,1$ от $I(\omega_0)$ — *полоса мешания* ПСК шириной $\Delta\omega_{\text{м}} = \omega_4 - \omega_1$.

Отношение $\frac{\Delta\omega_{\text{п}}}{\Delta\omega_{\text{м}}} = K_{\text{пр}}$ ($0 \leq K_{\text{пр}} \leq 1$) называют *коэффициентом прямоугোলности* ПСК, так как он характеризует степень приближения резонансной характеристики ПСК к идеальной прямоугольной форме с $K_{\text{пр}} = 1$.

Согласно (3.24) для полосы пропускания

$$0,707 I(\omega_0) = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{2}} = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{1 + \xi_r^2}} \text{ при } \xi_r = \pm 1.$$

Тогда из (3.22) с учетом, что $2\Delta\omega_r = \Delta\omega_n$, получим

$$|\xi_r| = 1 = Q \frac{\Delta\omega_n}{\omega_0}, \text{ т.е.}$$

$$\Delta\omega_n = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (3.25)$$

Аналогично для полосы мешания

$$0,1 I(\omega_0) = \frac{I(\omega_0)}{10} = \frac{I(\omega_0)}{\sqrt{1 + \xi_m^2}} \text{ при } \xi_m \approx \pm 10.$$

Тогда из (3.22) с учетом, что $2\Delta\omega = \Delta\omega_m$, получим

$$|\xi_m| = 10 = Q \frac{\Delta\omega_m}{\omega_0}, \text{ т.е.}$$

$$\Delta\omega_m = 10 \frac{\omega_0}{Q} = 10 \Delta\omega_n.$$

Следовательно,

$$K_{\text{пр}} = \frac{\Delta\omega_n}{\Delta\omega_m} = 0,1,$$

т.е. для любого ПСК всегда $K_{\text{пр}} = 0,1$.

3.2.3. Передаточные амплитудно-частотные характеристики ПСК

Передаточные характеристики отличаются от входных тем, что воздействие и отклик рассматриваются на различных полюсах (зажимах) ПСК, т.е. ПСК представляется в виде четырехполюсника.

Рассмотрим передаточные характеристики по напряжению для двух часто используемых на практике схем включения ПСК в виде четырехполюсников (рис. 3.16):

$$H_c(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1/(\omega C)}{Z_{\text{вх}}}; \quad H_l(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega L}{Z_{\text{вх}}}.$$

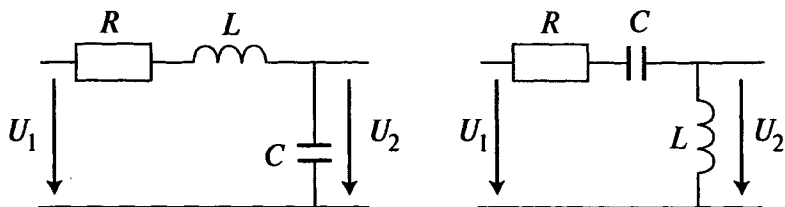


Рис. 3.16

На частотах, близких к ω_0 , $\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L = \rho$, т.е.

$$H_c(\omega) = H_l(\omega) \approx \frac{\rho}{R\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (3.26)$$

Тогда графики передаточных АЧХ ПСК примут вид, изображенный на рис. 3.17.

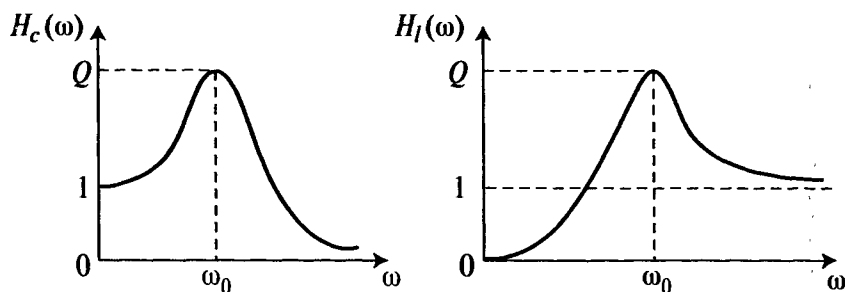


Рис. 3.17

Таким образом, вблизи резонансной частоты передаточные АЧХ двух схем включения ПСК практически совпадают.

Для реализации функций селекции (выбора) сигналов ПСК используют обычно на частотах воздействий, близких к резонансной частоте. С увеличением добротности Q возрастает максимум АЧХ, но при этом уменьшается полоса пропускания [см. (3.25)].

3.3. Частотные характеристики параллельных колебательных контуров

3.3.1. Виды и основные параметры параллельных колебательных контуров, влияние сопротивления источника и нагрузки

Параллельный колебательный контур (ПРК) — это биквад с параллельно соединенными дуальными реактивными элементами (L и C), для которого условие апериодичности (3.13) не выполняется, т.е. ПРК является колебательной (резонансной) цепью.

Различают три вида (рода) ПРК (рис. 3.18).

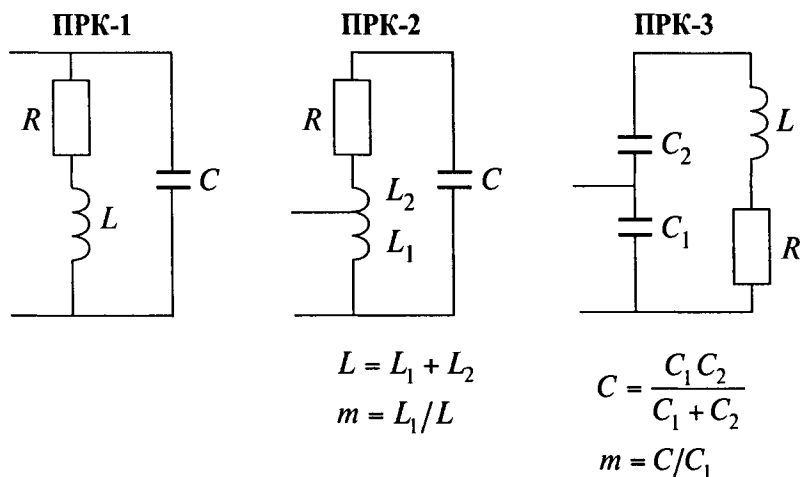


Рис. 3.18

Для ПРК-2 и ПРК-3 частичность включения индуктивного и емкостного элементов определяется *коэффициентом включения m* :

- для ПРК-2

$$m = \frac{\omega L_1}{\omega L} = \frac{L_1}{L}, \quad (3.27)$$

т.е. $L_1 = m L$; $L_2 = (1 - m)L$;

- для ПРК-3

$$m = \frac{1/(\omega C_1)}{1/(\omega C)} = \frac{C}{C_1}, \quad (3.28)$$

т.е. $C_1 = \frac{C}{m}$; $C_2 = \frac{C}{1-m}$.

Частичность включения реактивных элементов обеспечивает не только *резонанс токов* (см. 2.2.3) при $X_l = X_c$, но и *резонанс напряжений* при $X_{l2} = X_c$ для ПРК-2 или при $X_l = X_{c2}$ для ПРК-3.

Основные параметры ПРК:

- резонансная частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f$;
- волновое сопротивление $\rho = \sqrt{L/C}$;
- эквивалентное сопротивление

$$R_3 = \frac{\rho^2}{R}; \quad (3.29)$$

- добротность ПРК

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{R} \frac{\rho}{\rho} = \frac{\rho^2/R}{\rho} = \frac{R_3}{\rho}. \quad (3.30)$$

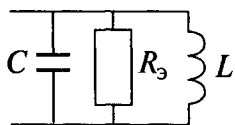


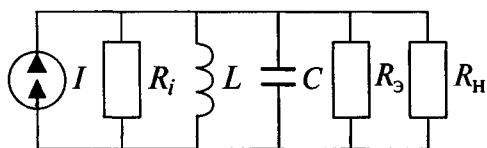
Рис. 3.19

Эквивалентное сопротивление ПРК-1,2,3 является параллельным сопротивлением потерь, т.е. подключается параллельно реактивным элементам контура (рис. 3.19) и определяется аналогично (3.21).

Величина эквивалентного сопротивления ПРК составляет несколько десятков или сотен килоомов, в то время как последовательное сопротивление потерь R составляет единицы и десятки омов.

Анализ приведенных выражений для параметров ПРК показывает, что параметры ω_0 , ρ , R_3 и Q от коэффициента включения m не зависят. При подключении к ПРК источника и нагрузки его добротность снижается, так как сопротивления источника и нагрузки подключают параллельно

(«шунтируют») к эквивалентному сопротивлению ПРК (рис. 3.20), что снижает общее эквивалентное сопротивление R_{30} , а следовательно, и добротность ПРК [см. (3.30)].



$$R'_{30} = \frac{R_i R_3}{R_i + R_3} < R_3$$

$$R''_{30} = \frac{R_H R_3}{R_H + R_3} < R_3$$

Рис. 3.20

3.3.2. Входные частотные характеристики ПРК

Входной частотной характеристикой ПРК является частотная зависимость его входного комплексного сопротивления. Рассмотрим входное комплексное сопротивление ПРК-2 (рис. 3.21):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &= \frac{j\omega L_1 \left\{ R + j \left[\omega L_2 - 1/(\omega C) \right] \right\}}{j\omega L_1 + R + j \left[\omega L_2 - 1/(\omega C) \right]} = \\ &= \frac{j\omega m L \left[R + j\omega(1-m)L - j/(\omega C) \right]}{R + j \left[\omega L - 1/(\omega C) \right]}. \end{aligned}$$

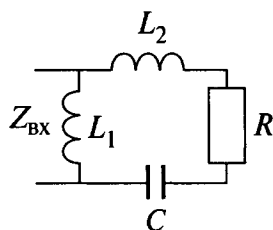


Рис. 3.21

Поскольку сопротивление потерь R значительно меньше волнового сопротивления ρ , то, пренебрегая R в числителе, получим

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}} &\approx \frac{-m(1-m)\omega^2 L^2 + m \cdot L/C}{R + j \left[\omega L - 1/(\omega C) \right]} = \frac{-m\rho^2 + m^2\rho^2 + m\rho^2}{R + j \left[\omega L - 1/(\omega C) \right]} = \\ &= \frac{m^2\rho^2}{R + j \left[\omega L - 1/(\omega C) \right]}. \end{aligned}$$

С учетом (3.23)

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{m^2 \rho^2}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]} = \frac{m^2 \rho^2}{R(1 + j\xi)}$$

При резонансе токов $\xi = 0$, т.е. резонансное входное сопротивление ПРК

$$Z_{\text{вх}0} = \frac{m^2 \rho^2}{R} = m^2 R_3. \quad (3.31)$$

Тогда:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{m^2 \rho^2}{R \sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{m^2 R_3}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (\text{входная АЧХ}); \quad (3.32)$$

$$\psi_{\text{вх}} = -\text{arctg } \xi \quad (\text{входная ФЧХ}).$$

Графики входных АЧХ и ФЧХ ПРК-1 приведены на рис. 3.22.

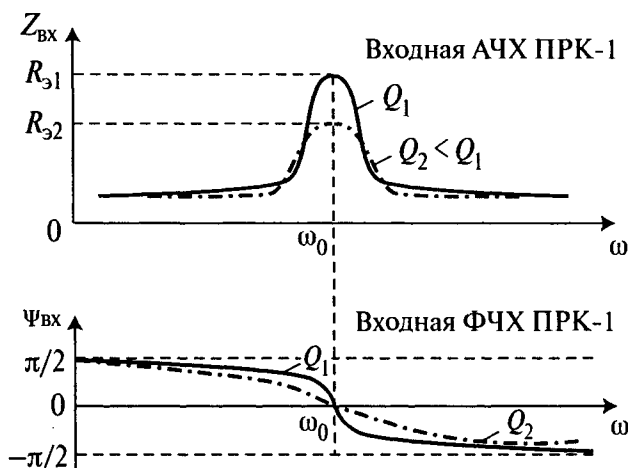


Рис. 3.22

Для ПРК-2 и ПРК-3 влияние резонанса напряжений в них приводит к следующим входным АЧХ (рис. 3.23).

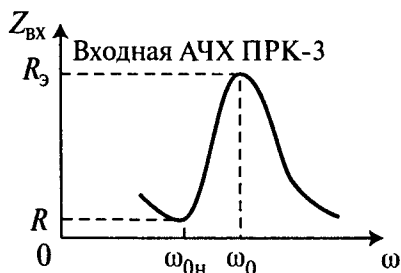
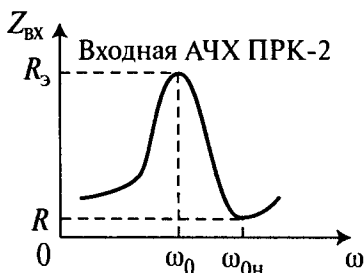


Рис. 3.23

При подключении ПРК-1 к идеальному источнику тока (рис. 3.24) модуль напряжения с учетом (3.32) равен

$$U = I Z_{\text{вх}} = \frac{I R_3}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{U(\omega_0)}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.33)$$

График частотной зависимости напряжения на ПРК называют *входной резонансной характеристикой*, она аналогична входной резонансной характеристике (частотной зависимости тока) ПСК.

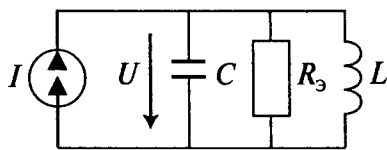


Рис. 3.24

Поскольку выражения (3.33) и (3.24) аналогичны, то аналогично определяются полоса пропускания на уровне $0,7 U(\omega_0)$, полоса мешания на уровне $0,1 U(\omega_0)$, а коэффициент прямоугольности $K_{\text{пр}}$, равный отношению полосы пропускания к полосе мешания, также всегда равен $0,1$.

Ширина полосы пропускания ПРК определяется согласно (3.25).

3.3.3. Передаточные амплитудно-частотные характеристики ПРК

Для представления ПРК в виде четырехполюсника рассмотрим передаточные частотные характеристики по току на примере ПРК-1, для чего подключим его к идеальному источнику тока I (рис. 3.25):

$$H_c(\omega) = I_c/I; \quad H_l(\omega) = I_l/I; \quad I_c = U\omega C; \quad I_l = U/(\omega L).$$

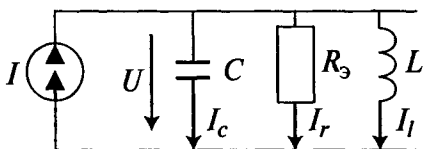


Рис. 3.25

С учетом (3.33) токи в ветвях с реактивными элементами соответственно равны

$$I_c = \frac{IR_3\omega C}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad I_l = \frac{IR_3}{\omega L\sqrt{1+\xi^2}}.$$

Тогда передаточные АЧХ по току для ветвей с реактивными элементами на частотах, близких к резонансной частоте, равны

$$H_c = H_l \approx \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (3.34)$$

Графики передаточных АЧХ по току для ПРК приведены на рис. 3.26. Вблизи резонансной частоты передаточные АЧХ по току для ветвей с дуальными реактивными элементами совпадают, а их различие наступает за пределами полосы пропускания (ПП).

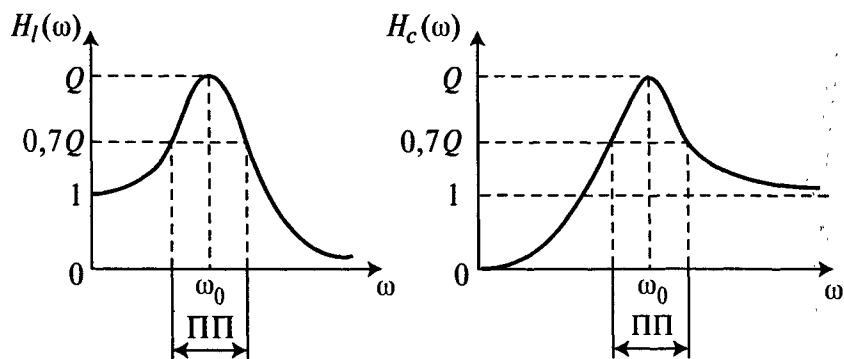


Рис. 3.26

АЧХ по току для ветви ПРК с индуктивностью $H_l(\omega)$ аналогична АЧХ по напряжению для ПСК с емкостью на выходе $H_c(\omega)$ (см. рис. 3.17), а АЧХ по току для ветви

ПРК с емкостью $H_c(\omega)$ аналогична АЧХ по напряжению для ПСК с индуктивностью на выходе $H_l(\omega)$.

С увеличением добротности Q передаточные АЧХ «вытягиваются» вверх и полоса пропускания становится уже.

3.4. Частотные характеристики связанных колебательных контуров

3.4.1. Виды связанных колебательных контуров

Связанные колебательные контуры (СКК) — это совокупность одиночных колебательных контуров (ОКК), связанных между собой сопротивлением (проводимостью) связи $Z_{св}$ ($Y_{св}$).

ОКК — это последовательный (ПСК) или параллельный (ПРК) колебательный контур. Простейшей совокупностью ОКК является совокупность *первичного* (подключенного к источнику) и *вторичного* (подключенного к нагрузке) ОКК.

Благодаря использованию СКК повышаются избирательные свойства фильтров сосредоточенной селекции (ФСС) систем связи и радиолокации, т.е. повышается коэффициент прямоугольности $K_{пр}$ ФСС, который для ОКК всегда равен 0,1 и не зависит от добротности.

Преимущества СКК в сравнении с ОКК:

- более высокий $K_{пр}$, обычно $0,1 < K_{пр} < 0,43$;
- бóльшая равномерность АЧХ в полосе пропускания;
- удобство согласования СКК с источником и нагрузкой;
- возможность электрического (кондуктивного) разделения цепей первичного и вторичного ОКК при трансформаторной связи.

Различают следующие **виды СКК**:

а) по топологии:

- Т-образные (с внутренней связью) (рис. 3.27);
- П-образные (с внешней связью) (рис. 3.28);

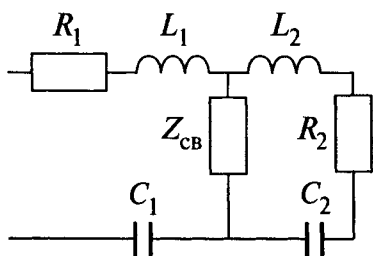


Рис. 3.27

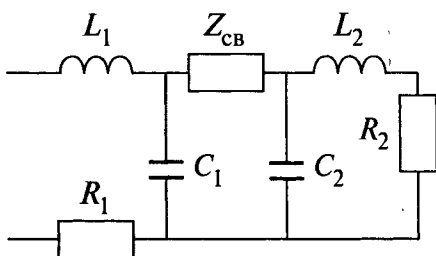


Рис. 3.28

б) по виду связи:

- с трансформаторной (рис. 3.29) или автотрансформаторной (рис. 3.30) связью;
- с индуктивной связью;
- с емкостной связью;
- с комбинированной связью.

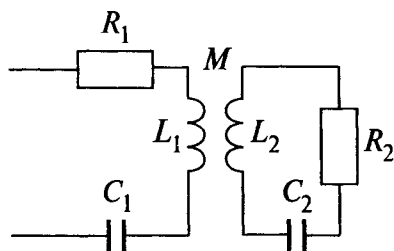


Рис. 3.29

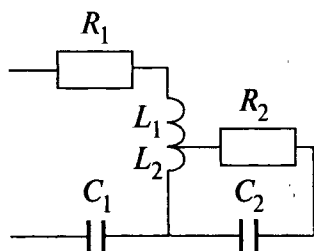


Рис. 3.30

Согласно (2.33) коэффициент связи $K_{св}$ для СКК с трансформаторной связью, которая является T -образной СКК, равен

$$K_{св} = K_M = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \frac{\omega}{\omega} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}} = \frac{X_{св}}{\sqrt{X_1 X_2}}, \quad (3.35)$$

где $X_{св}$, X_1 и X_2 — реактивные сопротивления внутренней взаимоиндуктивной (трансформаторной) связи, индуктивного элемента первичного и вторичного ОКК соответственно.

Для *Π*-образных СКК (с внешней связью)

$$K_{\text{св}} = \frac{B_{\text{св}}}{\sqrt{B_1 B_2}}, \quad (3.36)$$

где $B_{\text{св}}$, B_1 и B_2 — реактивные проводимости внешней связи, первичного и вторичного ОКК соответственно.

3.4.2. Частотные свойства СКК

Рассмотрим частотные свойства СКК наиболее распространенного вида — с трансформаторной связью, обеспечивающего электрическое (кондуктивное) разделение цепей первичного и вторичного ОКК. Схема замещения такого СКК является Т-образной (см. рис. 2.20), т.е. имеет вид, приведенный на рис. 3.31 (внутреннее сопротивление источника E_1 включим в состав R_1).

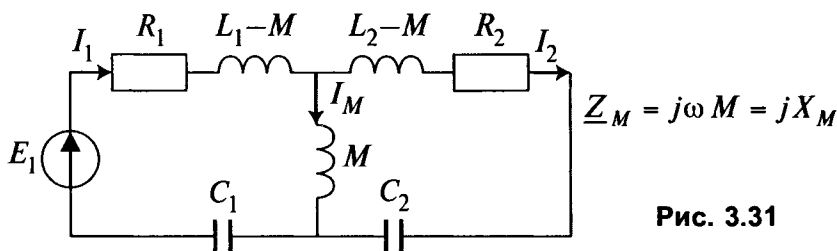


Рис. 3.31

Тогда согласно (2.38) входное сопротивление СКК

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{E_1}{I_1} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{\text{вн1}},$$

где \underline{Z}_{11} — собственное сопротивление первичного ОКК; $\underline{Z}_{\text{вн1}}$ — вносимое комплексное сопротивление в первичный ОКК из вторичного ОКК.

В свою очередь,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_M = R_1 + j \left[\omega (L_1 - M) - \frac{1}{\omega C_1} \right] + j\omega M = \\ &= R_1 + jX_{11}; \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{\text{вн1}} = \frac{-\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{22}} = R_{\text{вн1}} + jX_{\text{вн1}},$$

где $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_M = R_2 + j \left[\omega(L_2 - M) - \frac{1}{\omega C_2} \right] + j\omega M =$
 $= R_2 + jX_{22}$ — собственное сопротивление вторичного ОКК.

Тогда схема замещения первичного ОКК примет вид, приведенный на рис. 3.32:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{\text{вн1}} = (R_1 + R_{\text{вн1}}) + j(X_{11} + X_{\text{вн1}}) = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}.$$

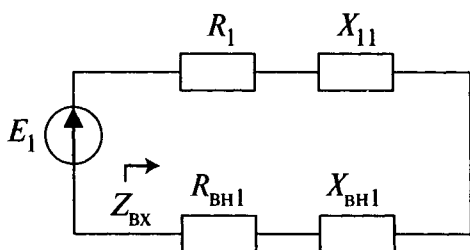


Рис. 3.32

Рассмотрим частотные свойства вносимого резистивного $R_{\text{вн1}}$ и реактивного $X_{\text{вн1}}$ сопротивлений.

Согласно определению комплексного вносимого сопротивления для первичного ОКК получим

$$\underline{Z}_{\text{вн1}} = \frac{-(jX_M)^2}{\underline{Z}_{22}} = \frac{X_M^2}{R_2(1 + j\xi_2)}. \quad (3.37)$$

Осуществим деление на комплексное число $(1 + j\xi_2)$:

$$\underline{Z}_{\text{вн1}} = \frac{X_M^2/R_2}{1 + j\xi_2} \frac{1 - j\xi_2}{1 - j\xi_2} = \frac{X_M^2/R_2}{1 + \xi_2^2} -$$

$$-j \frac{X_M^2 \xi_2/R_2}{1 + \xi_2^2} = R_{\text{вн1}} + jX_{\text{вн1}},$$

$$R_{\text{вн1}} = \frac{X_M^2/R_2}{1 + \xi_2^2}; \quad X_{\text{вн1}} = -\xi_2 R_{\text{вн1}}. \quad (3.38)$$

Построим графики частотных зависимостей (3.38), т.е. $R_{\text{вн1}} = f_1(\xi_2)$ и $X_{\text{вн1}} = f_2(\xi_2)$ (рис. 3.33).

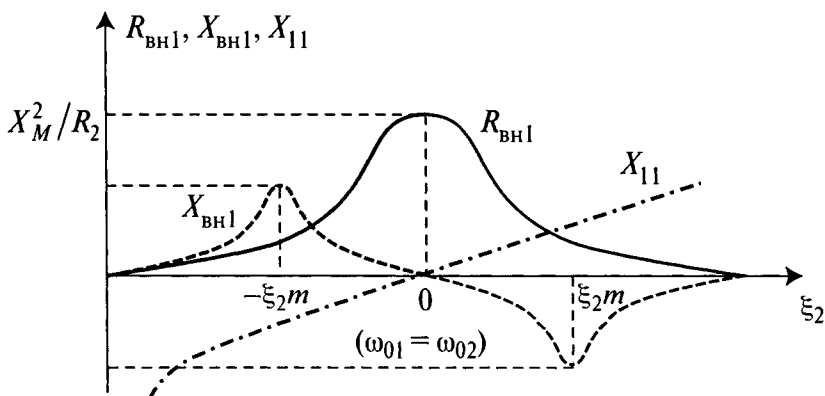


Рис. 3.33

Выводы:

1. В СКК вторичный ОКК вносит в первичный ОКК дополнительное сопротивление потерь $R_{\text{вн1}}$, которое максимально на резонансной частоте вторичного ОКК ω_{02} , т.е. при $\xi_2 = 0$.

2. При настройке двух ОКК на одну частоту $\omega_0 = \omega_{01} = \omega_{02}$ характер вносимого реактивного сопротивления $X_{\text{вн1}}$ противоположен характеру собственного реактивного сопротивления первичного ОКК X_{11} .

3. При больших расстройках $R_{\text{вн1}} \rightarrow 0$ и $X_{\text{вн1}} \rightarrow 0$, т.е. при больших отклонениях от резонансной частоты влияние (связь) вторичного ОКК на первичный практически отсутствует, что эквивалентно его размыканию.

Аналогично (3.37) для вторичного ОКК получим вносимое комплексное сопротивление во вторичный ОКК из первичного ОКК:

$$\underline{Z}_{\text{вн2}} = \frac{-\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_{11}} = \frac{-(jX_M)^2}{R_1(1 + j\xi_1)} = \frac{X_M^2/R_1}{1 + j\xi_1} = R_{\text{вн2}} + jX_{\text{вн2}}.$$

Тогда схема замещения вторичного ОКК примет вид, приведенный на рис. 3.34:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\text{ВЫХ}} &= \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{\text{ВН}2} = (R_2 + R_{\text{ВН}2}) + j(X_{22} + X_{\text{ВН}2}) = \\ &= R_{\text{ВЫХ}} + jX_{\text{ВЫХ}}.\end{aligned}$$

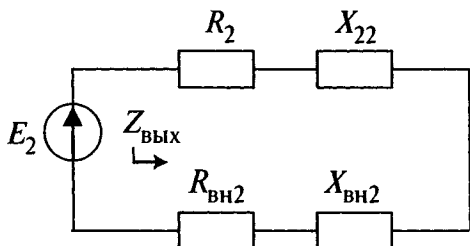


Рис. 3.34

По правилу делителя напряжения: $\underline{E}_2 = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11}}$.

Все предыдущие выводы относительно частотных свойств вносимых сопротивлений (резистивного и реактивного) справедливы также и для вносимых сопротивлений во вторичный ОКК из первичного ОКК.

Согласно (2.39) величина тока во вторичном ОКК

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{\text{ВЫХ}}} = \frac{\underline{E}_1 \cdot \underline{Z}_M / \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_{11}} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_M^2} = \\ &= \frac{\underline{E}_1 \cdot \underline{Z}_M / \underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_M^2 / \underline{Z}_{22}} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22} \underline{Z}_{\text{ВХ}}}\end{aligned}\quad (3.39)$$

3.4.3. Входные амплитудно-частотные характеристики СКК

Рассмотрим частотные зависимости входного резистивного $R_{\text{ВХ}}$, реактивного $X_{\text{ВХ}}$ и модуля $Z_{\text{ВХ}}$ сопротивлений СКК (рис. 3.35) с одинаковыми ОКК, т.е. при $R_1 = R_2 = R$; $L_1 = L_2 = L$; $C_1 = C_2 = C$; $Q_1 = Q_2 = Q$.

Назовем *параметром связи* величину

$$p_{\text{СВ}} = K_{\text{СВ}} \sqrt{Q_1 Q_2}.\quad (3.40)$$

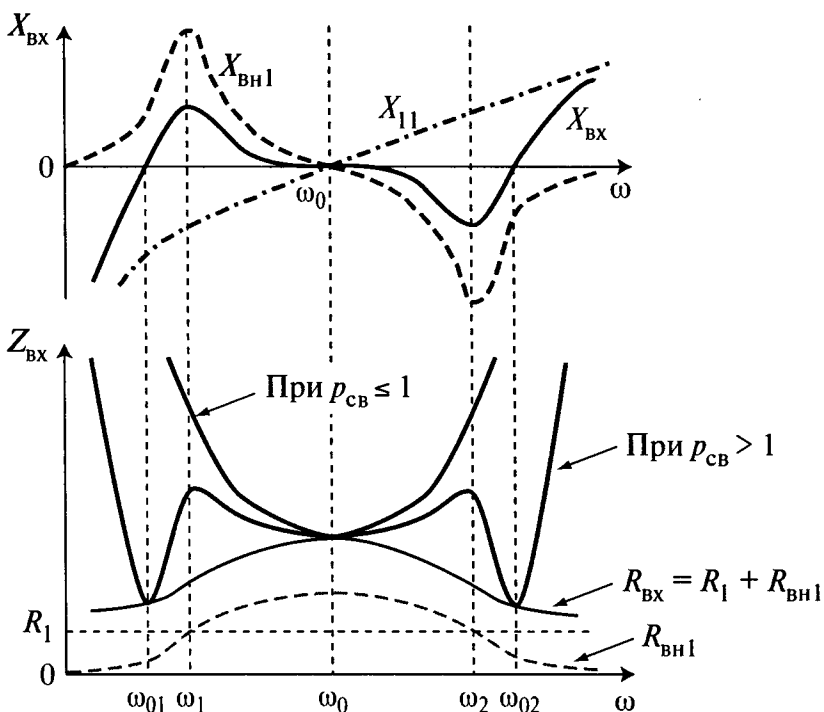


Рис. 3.35

Тогда при принятых выше условиях об одинаковых ОКК из (3.40) следует

$$p_{CB} = K_{CB} Q = \frac{M}{L} Q = \frac{M}{L} \frac{\rho}{R} \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega_0 M}{R} = \frac{X_M(\omega_0)}{R}.$$

Выводы:

1. При $p_{CB} > 1$ существует три резонансные частоты: ω_{01} , ω_0 и ω_{02} , на которых $X_{BX} = 0$. Частоты ω_{01} и ω_{02} называют **частотами связи СКК**.

На всех этих частотах $Z_{BX} = R_{BX}$, т.е. входное сопротивление имеет **резистивный** характер.

2. При $p_{CB} \leq 1$ частоты связи «сливаются» с основной резонансной частотой ω_0 .

3. На частотах ω_1 и ω_2 : $R_{BH1} = R_1$; $R_{BH2} = R_2$.

3.5. Передаточные частотные характеристики связанных колебательных контуров

3.5.1. Виды настроек СКК

Рассмотрим схему передачи энергии гармонических воздействий от источника E_1 в нагрузку R_H в СКК с трансформаторной связью двух одинаковых ОКК, в которых используются переменные конденсаторы для обеспечения их настроек (рис. 3.36).

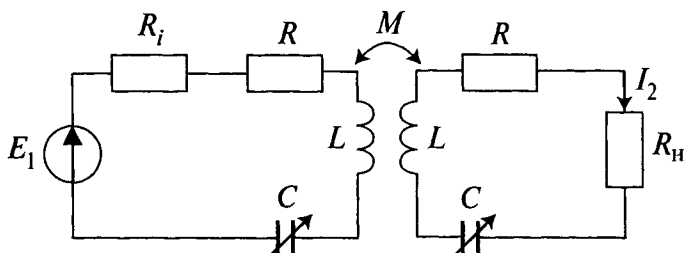


Рис. 3.36

Обозначим $R_1 = R_i + R$ и $R_2 = R + R_H$.

Рассмотрим *передаточную характеристику* СКК как отношение тока во вторичном контуре I_2 к напряжению источника E_1 . Тогда с учетом (3.39) получим

$$H(j\omega) = \frac{I_2}{E_1} = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{\text{вых}}} = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{22} \underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_M^2}. \quad (3.41)$$

Максимум функции $H(j\omega)$ достигается в следующих случаях:

- настройка на резонансную частоту ω_0 первичного ОКК;
- настройка на резонансную частоту ω_0 вторичного ОКК;
- индивидуальная настройка на резонансную частоту ω_0 каждого ОКК при отсутствии связи между ними;
- выбор оптимальной связи между ОКК.

Поэтому различают следующие **виды настроек СКК**:

1) *настройка первичного ОКК*, при которой в СКК достигается **первый частный резонанс**:

$$X_{\text{вх}} = X_{11} + X_{\text{вн1}} = 0; \quad Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}}.$$

$$\text{Согласно (3.41)} \quad H_1(j\omega) = \frac{jX_M}{Z_{22}R_{\text{вх}}} > H(j\omega);$$

2) *настройка вторичного ОКК*, при которой в СКК достигается **второй частный резонанс**:

$$X_{\text{вых}} = X_{22} + X_{\text{вн2}} = 0; \quad Z_{\text{вых}} = R_{\text{вых}}.$$

$$\text{Согласно (3.41)} \quad H_2(j\omega) = \frac{jX_M}{Z_{11}R_{\text{вых}}} > H(j\omega);$$

3) *индивидуальная настройка каждого ОКК*, при которой достигается **индивидуальный резонанс**:

$$X_{11} = X_{22} = 0; \quad X_{\text{вн1}} = X_{\text{вн2}} = 0; \quad X_{\text{вх}} = X_{\text{вых}} = 0; \quad Z_{11} = R_1,$$

т.е.

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} \quad \text{и} \quad Z_{\text{вых}} = R_{\text{вых}}.$$

$$\text{Согласно (3.41)} \quad H_3(j\omega) = \frac{jX_M}{R_1 R_{\text{вых}}} > H_{1,2}(j\omega);$$

4) *настройка на один из частных резонансов и выбор оптимальной связи* путем изменения взаимоиндуктивности M , при которой достигается **сложный резонанс**.

Из уравнения $\frac{dH_{1,2}}{dX_M} = 0$ получим (убедиться самостоятельно):

$$X_{M \text{ опт}} = Z_{11} \sqrt{R_2/R_1} = Z_{22} \sqrt{R_1/R_2}; \quad R_1 = R_{\text{вн1}}; \quad R_2 = R_{\text{вн2}}.$$

$$\text{Тогда } H_4(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}} > H_3(\omega);$$

5) *индивидуальная настройка ОКК и выбор оптимальной связи* путем изменения взаимоиндуктивности M ,

при которой достигается *полный резонанс*. Из уравнения

$$\frac{dH_3}{dX_M} = 0 \text{ получим } X_{M \text{ опт}} = \sqrt{R_1 R_2}. \text{ Тогда}$$

$$H_5(\omega) = H_4(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (3.42)$$

При анализе АЧХ СКК удобно использовать параметр связи [см. (3.40)]:

$$\begin{aligned} p_{\text{св}} &= K_{\text{св}} \sqrt{Q_1 Q_2} = \frac{M}{L} \frac{\rho}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{\omega_0 M}{\sqrt{R_1 R_2}} = \\ &= \frac{X_M(\omega_0)}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{X_M(\omega_0)}{X_{M \text{ опт}}}, \end{aligned}$$

тогда

$$X_M(\omega_0) = p_{\text{св}} \sqrt{R_1 R_2}. \quad (3.43)$$

Таким образом, *параметр связи* — это отношение сопротивления связи на резонансной частоте к оптимальному сопротивлению связи.

При настройке ОКК ($\xi = 0$) из (3.38) получим

$$\begin{cases} R_{\text{вн1}}(\omega_0) = \frac{X_M^2(\omega_0)}{R_2} = p_{\text{св}}^2 R_1; \\ R_{\text{вн2}}(\omega_0) = \frac{X_M^2(\omega_0)}{R_1} = p_{\text{св}}^2 R_2. \end{cases} \quad (3.44)$$

Таким образом, максимальная величина вносимых резистивных сопротивлений пропорциональна квадрату параметра связи.

3.5.2. Передаточные амплитудно-частотные характеристики СКК

Для удобства анализа рассмотрим СКК с одинаковыми ОКК, т.е. при

$$R_1 = R_2 = R; \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi; \quad Z_{11} = Z_{22} = Z = R(1 + j\xi).$$

Из (3.41) с учетом (3.43) при $X_M \approx X_M(\omega_0) = p_{CB} R$ получим

$$H(j\omega) = \frac{jX_M}{Z^2 - (jX_M)^2} \approx \frac{j p_{CB} R}{R^2 (1 + j\xi)^2 + (p_{CB} R)^2} =$$

$$= \frac{j p_{CB}/R}{(1 - \xi^2 + p_{CB}^2) + j \cdot 2\xi}.$$

АЧХ СКК равна

$$H(\xi) = \frac{p_{CB}/R}{\sqrt{(1 - \xi^2 + p_{CB}^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (3.45)$$

Рассмотрим *нормированную* АЧХ СКК с учетом максимально возможного значения (3.42) $H_{\max} = \frac{1}{2R}$:

$$H_H(\xi) = \frac{H(\xi)}{H_{\max}} = \frac{2p_{CB}}{\sqrt{(1 - \xi^2 + p_{CB}^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (3.46)$$

При настройке ($\xi = 0$)

$$H_H(0) = H_H(\xi = 0) = \frac{2p_{CB}}{1 + p_{CB}^2}. \quad (3.47)$$

Из условия $H_H(\xi) = 1$ найдем значение обобщенной расстройки для частот максимума АЧХ (частот связи):

$$\xi_{ч.с} = \pm \sqrt{p_{CB}^2 - 1}. \quad (3.48)$$

Из (3.48) следует:

- при $p_{CB} > 1$ существуют две симметрично расположенные относительно ω_0 ($\xi = 0$) частоты связи, т.е. нормированная АЧХ достигает максимума (значения 1) в двух точках ($\pm \xi_{ч.с}$), т.е. становится «двугорбой»;
- при $p_{CB} = 1$ две частоты связи «сливаются» в одну частоту ω_0 , т.е. нормированная АЧХ достигает максимума в одной точке ($\xi = 0$);

- при $p_{св} < 1$ действительных значений частот связи нет, т.е. нормированная АЧХ нигде не достигает максимума, а ее наибольшее значение на частоте ω_0 определяется выражением (3.47); в этом случае нормирование следует осуществлять дополнительно по $H_H(0)$, т.е. получим

$$H'_H(\xi) = \frac{H_H(\xi)}{H_H(0)} = \frac{1 + p_{св}^2}{\sqrt{(1 - \xi^2 + p_{св}^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (3.49)$$

Для построения нормированных АЧХ СКК (3.46) и (3.49) найдем значения обобщенных расстроек для полосы пропускания ($\xi_{0,7}$) из условия $H_H(\xi_{0,7}) = 0,7$ и для полосы мешания ($\xi_{0,1}$) из условия $H_H(\xi_{0,1}) = 0,1$ по формулам, приведенным в табл. 3.1.

Таблица 3.1

	$p_{св} \geq 1$	$p_{св} < 1$
$\xi_{0,7}$	$\pm\sqrt{p_{св}^2 - 1 + 2p_{св}}$	$\pm\sqrt{p_{св}^2 - 1 + \sqrt{2(p_{св}^2 + 1)}}$
$\xi_{0,1}$	$\pm\sqrt{p_{св}^2 - 1 + 20p_{св}}$	$\pm\sqrt{p_{св}^2 - 1 + 2\sqrt{25p_{св}^4 + 49p_{св}^2 + 25}}$

Из (3.47) при условии $H_H(0) = 0,7$ получим два значения параметра связи $p_{св1} = 0,41$ и $p_{св2} = 2,41$. Поскольку $p_{св1} < 1$, а $p_{св2} > 1$, то при $p_{св1}$ получим «одногорбую» АЧХ с максимумом 0,7 на резонансной частоте ОКК ω_0 , а при $p_{св2}$ получим «двугорбую» АЧХ с «провалом» до уровня 0,7 на частоте ω_0 между двумя максимумами («горбами») на частотах связи $\omega_{ч.с1}$ и $\omega_{ч.с2}$.

Коэффициент прямоугольности АЧХ определяем как отношение обобщенных расстроек $K_{пр} = \frac{\xi_{0,7}}{\xi_{0,1}}$.

Для построения АЧХ результаты расчета сведем в табл. 3.2.

Таблица 3.2

$p_{св}$	$\xi_{ч.с}$	$\xi_{0,7}$	$\xi_{0,1}$	$H_H(0)$	$K_{пр}$
0,41	—	$\pm 0,78$	$\pm 3,3$	0,7	$\frac{0,78}{3,3} = 0,24$
1,0	0	$\pm 1,41$	$\pm 4,47$	1	$\frac{1,41}{4,47} = 0,32$
2,41	$\pm 2,19$	$\pm 3,1$	$\pm 7,27$	0,7	$\frac{3,1}{7,27} = 0,43$

По данным табл. 3.2 построим нормированные АЧХ СКК (рис. 3.37).

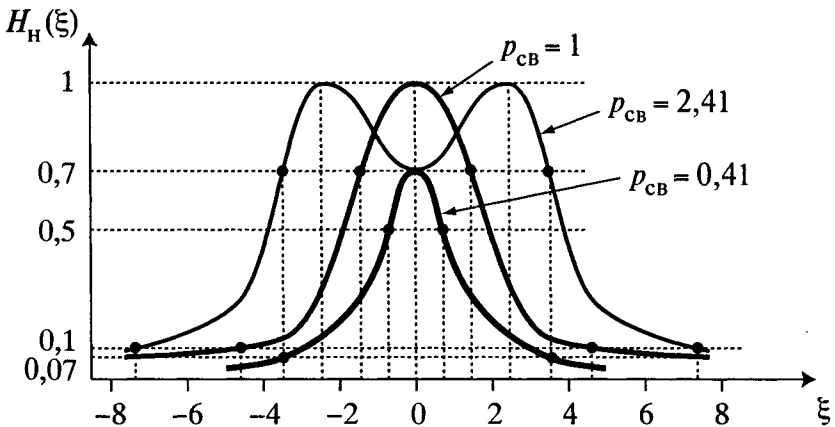


Рис. 3.37

Выводы:

1. При $p_{св} > 1$ АЧХ СКК является «двугорбой», причем «горбы» (максимумы) находятся на частотах связи $\pm \xi_{ч.с}$.
2. При $p_{св} = 1$ «одногорбая» АЧХ переходит в «двугорбую», поэтому параметр связи $p_{св} = 1$ называют *критическим*.
3. При $p_{св} = 2,41$ «провал двугорбой» АЧХ достигает уровня 0,7, ниже которого АЧХ не должна опускаться в полосе пропускания, иначе получим раздвоенную полосу

пропускания, что недопустимо; поэтому параметр связи $p_{св} = 2,41$ называют *предельным*.

4. С увеличением $p_{св}$ растет коэффициент прямоугольности (избирательность) $K_{пр}$ и достигает предельного значения 0,43 при предельном параметре связи (см. табл. 3.2).

3.5.3. Энергопередача в СКК

Рассмотрим передачу активной мощности в СКК с трансформаторной связью при настройке ОКК.

Энергопередача в первичном ОКК. Схема замещения СКК со стороны первичного контура при настройке ($X_{вх} = 0$) имеет вид, приведенный на рис. 3.38.

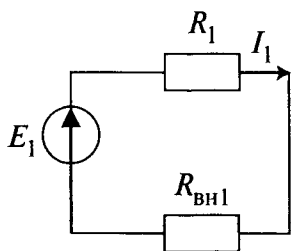


Рис. 3.38

Активная мощность, передаваемая во вторичный ОКК,

$$P_2 = I_1^2 R_{вн1} = \frac{E_1^2 R_{вн1}}{(R_{вн1} + R_1)^2}.$$

Анализ выражения для мощности P_2 на экстремум показывает (убедиться самостоятельно), что аналогично (2.27) максимум мощности P_2 получим при $R_1 = R_{вн1}$, это выполняется при $p_{св} = 1$ [см. (3.44)].

Активная мощность потерь в первичном ОКК

$$P_{лп} = I_1^2 R_1.$$

Тогда коэффициент полезного действия СКК в первичном контуре

$$\eta_1 = \frac{P_2}{P_{лп} + P_2} = \frac{R_{вн1}}{R_{вн1} + R_1} = \frac{p_{св}^2 R_1}{p_{св}^2 R_1 + R_1} = \frac{p_{св}^2}{p_{св}^2 + 1}. \quad (3.50)$$

Следовательно,

$$p_{св} = \sqrt{\frac{\eta_1}{1 - \eta_1}}. \quad (3.51)$$

Графики зависимостей нормированной резистивной мощности $P_2/P_{2\max}$ и коэффициента полезного действия η_1 от параметра связи приведены на рис. 3.39.

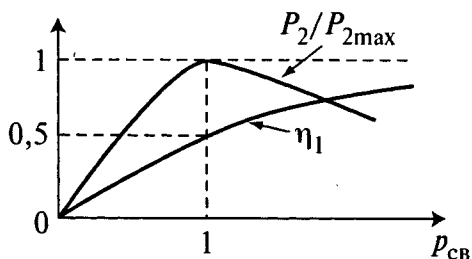


Рис. 3.39

Выводы:

1. При критической связи ($p_{св} = 1$) во вторичный ОКК передается максимальная резистивная мощность, а КПД равен 0,5.

2. КПД зависит только от параметра связи.

Энергопередача во вторичном ОКК. Схема замещения СКК со стороны вторичного контура при резонансе ($X_{вых} = 0$) имеет вид, приведенный на рис. 3.40:

$$R_2 = R + R_H; \quad R_{вн2} = p_{св}^2 R_2;$$

$$E_2 = \frac{E_1 X_M(\omega_0)}{R_1}.$$

Резистивная мощность в нагрузке с учетом (3.50)

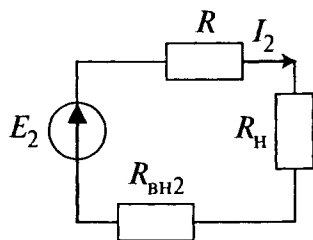


Рис. 3.40

$$P_H = I_2^2 R_H = \frac{E_2^2 R_H}{(R_2 + R_{вн2})^2} = \frac{E_1^2 p_{св}^2 R_H}{R_1 R_2 (1 + p_{св}^2)^2} = \frac{E_1^2 R_H}{R_1 R_2} \eta_1 (1 - \eta_1). \quad (3.52)$$

Резистивная мощность потерь во вторичном ОКК

$$P_{2п} = I_2^2 (R + R_{вн2}).$$

Тогда КПД во вторичном контуре

$$\eta_2 = \frac{P_H}{P_{2п} + P_H} = \frac{R_H}{R_H + R + R_{вн2}} = \frac{R_H}{R_H + R_{вых}}$$

Графики зависимостей нормированной резистивной мощности в нагрузке и коэффициента полезного действия во вторичном ОКК от сопротивления нагрузки $P_H = f(R_H)$ и $\eta_2 = \varphi(R_H)$ аналогичны графикам на рис. 2.15.

Выводы:

1. При $R_H = R_{вых}$ в нагрузку поступает максимальная резистивная мощность, а КПД равен 0,5.
2. Условия согласования по максимуму резистивной мощности и по максимуму КПД не совпадают.
3. КПД всей системы СКК равен $\eta = \eta_1 \eta_2$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Виды пассивных билинов и схемы их реализации.
2. Виды пассивных биквадов и схемы их реализации.
3. Условие апериодичности цепей второго порядка.
4. Основные параметры ПСК.
5. Параметры входной резонансной характеристики ПСК.
6. Особенности передаточных характеристик ПСК.
7. Виды ПРК, их особенности и основные параметры.
8. Влияние источника и нагрузки на добротность ПРК.
9. Особенности передаточных характеристик ПРК.
10. Виды СКК и их основные параметры.
11. Вносимые сопротивления и их частотные зависимости.
12. Входные сопротивления и их частотные зависимости.
13. Передаточные частотные характеристики СКК.
14. Виды и способы настроек в СКК.
15. Условие передачи максимальной мощности в СКК.
16. Условие максимального КПД в СКК.

Тема 4. РЕЖИМ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

4.1. Классический метод анализа переходных процессов

4.1.1. Законы коммутации в электрических цепях

Коммутация — это мгновенное (скачкообразное) изменение структуры или параметров ЭЦ (включение, отключение, переключение и т.п.).

В результате коммутации наступает *переходный процесс* — процесс перехода электрической цепи из одного установившегося режима в другой. При этом различают *вынужденный* переходный процесс (например, в результате подключения источников к ЭЦ) и *свободный* переходный процесс (например, при отключении источников от ЭЦ).

В отличие от процесса коммутации переходный процесс не может быть скачкообразным, так как скачкообразное изменение электрической энергии ЭЦ потребовало бы ее бесконечной мощности ($p = dW/dt$).

Реальная ЭЦ содержит реактивные элементы L и C , способные запасать электрическую энергию W в магнитном или электрическом полях, при этом электрическая энергия не может накапливаться мгновенно (скачкообразно).

Поскольку величина запасаемой энергии в магнитном и электрическом полях согласно (1.7) и (1.12) соот-

ветственно равна $W_l = \frac{L i^2}{2}$ и $W_c = \frac{C u^2}{2}$, то при $L = \text{const}$ и $C = \text{const}$ справедливы два закона коммутации.

Первый закон коммутации: Ток в индуктивном элементе скачком измениться не может, т.е. ток в индуктивном элементе до коммутации $i_l(0_-)$ должен быть равен току в момент коммутации $i_l(0)$:

$$i_l(0_-) = i_l(0). \quad (4.1)$$

Второй закон коммутации: Напряжение на емкостном элементе скачком измениться не может, т.е. напряжение на емкостном элементе до коммутации $u_c(0_-)$ должно быть равно напряжению в момент коммутации $u_c(0)$:

$$u_c(0_-) = u_c(0). \quad (4.2)$$

Все другие токи и напряжения могут изменяться скачком.

При анализе переходных процессов исходный установившийся режим называют *начальными условиями*. Они могут быть *нулевыми*: $i_l(0_-) = 0$, $u_c(0_-) = 0$ (например, при включении цепи) и *ненулевыми*: $i_l(0_-) \neq 0$, $u_c(0_-) \neq 0$ (например, при выключении цепи).

Согласно законам коммутации, при нулевых начальных условиях:

$i_l(0_-) = i_l(0) = 0$, т.е. индуктивный элемент в момент подключения есть *разрыв* цепи;

$u_c(0_-) = u_c(0) = 0$, т.е. емкостный элемент в момент подключения есть *короткое замыкание* цепи.

На практике часто искусственно могут создаваться условия для принудительного скачка тока в индуктивном элементе или скачка напряжения на емкостном элементе. Например, в схеме зажигания автомобилей созданы условия для принудительного скачка тока через индуктивность (рис. 4.1).

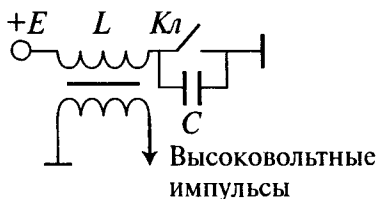


Рис. 4.1

В этой схеме принудительный скачок тока происходит на контактах ключа K_1 , что приводит к искрению и обгоранию контактов. Для предотвращения обгорания контактов их «шунтируют» конденсатором C , который скачок тока «берет на себя», т.е. на конденсаторе происходит скачок тока, а на индуктивности — скачок напряжения, который затем с помощью высоковольтной обмотки используется для получения высоковольтного напряжения зажигания.

4.1.2. Алгоритм классического метода анализа переходных процессов

Задача анализа — определить законы изменения токов и напряжений на реактивных элементах ЭЦ после коммутации. Поскольку переходный процесс является динамическим процессом, то он описывается дифференциальным уравнением.

Классический метод анализа переходных процессов опирается на классический метод решения дифференциальных уравнений, согласно которому решение линейного неоднородного (с правой ненулевой частью) дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами равно сумме двух решений — установившегося v_y и свободного $v_{св}$:

$$v = v_y + v_{св}.$$

Установившееся решение $v_y = v$ при $dv/dt = 0$, т.е. это напряжение (ток) в новом установившемся режиме после окончания переходного процесса.

Свободное решение $v_{св}$ — это напряжение (ток), определяемый как

$$v_{св} = \sum_{i=1}^n A_i \exp(s_i t), \quad (4.3)$$

где A_i — i -й коэффициент, определяемый из начальных условий; s_i — i -й комплексный корень однородного характеристического уравнения порядка n .

Алгоритм классического метода анализа переходных процессов рассмотрим на примере последовательной цепи второго порядка (рис. 4.2).

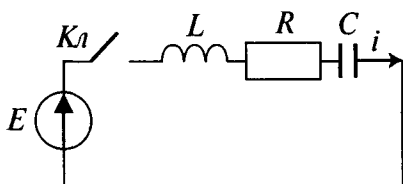


Рис. 4.2

Поскольку в ЭЦ элементы соединены последовательно, то общим для них является ток i , для которого и определим закон изменения после замыкания ключа $Kл$.

Алгоритм классического метода анализа включает семь пунктов:

1. *Определение начальных условий* для тех электрических величин, которые скачком не изменяются. В данной схеме такой величиной является ток через индуктивный элемент, которого до начала коммутации не было. Следовательно, начальные условия — нулевые, т.е.

$$i(0_-) = i(0) = 0.$$

2. *Составление дифференциального уравнения* для тока i после коммутации по законам Кирхгофа. Для данной схемы по второму закону Кирхгофа согласно (3.18) дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt}. \quad (4.4)$$

3. *Определение установившегося решения* при всех $d/dt = 0$: $i_y = 0$, что свидетельствует об отсутствии тока в цепи после окончания переходного процесса, так как в установившемся режиме постоянный ток через конденсатор не проходит (зарядившийся конденсатор создает такое же по величине встречное напряжение).

4. *Определение свободного решения* при $n = 2$:

$$i_{св} = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t),$$

где s_1, s_2 — корни однородного характеристического уравнения, полученного из (4.4): $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$.

5. *Запись полного решения:*

$$i = i_y + i_{св} = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t).$$

6. *Определение коэффициентов A_1 и A_2 из начальных условий:*

при $t = 0$: $i(0) = A_1 \exp(0) + A_2 \exp(0) = A_1 + A_2$.

Согласно определенным в п. 1 начальным условиям $i(0) = i(0_-) = 0$. Следовательно,

$$A_1 = -A_2 = A.$$

7. *Запись решения в окончательном виде:*

$$i = A[\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)].$$

Рассмотрим этот алгоритм применительно к схеме заряда-разряда емкости через резисторы (рис. 4.3).

В положении 1 ключа $Kл$ происходит заряд емкости C через резистор R_1 , а в положении 2 — разряд через резистор R_2 .

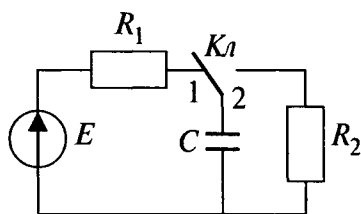


Рис. 4.3

Рассмотрим сначала процесс заряда емкости (ключ $Kл$ в положении 1).

1. Полагаем, что до начала коммутации конденсатор был разряжен, т.е. начальные условия нулевые: $u_c(0_-) = u_c(0) = 0$.

2. Записываем дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа после коммутации: $E = i_3 R_1 + u_c$.

С учетом (1.9) получим $R_1 C \frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

Обозначим $R_1 C = \tau_1$ и назовем ее *постоянной времени заряда*. Тогда дифференциальное уравнение примет

классический вид, при котором коэффициент при u_c должен быть равен 1:

$$\tau_1 \frac{du_c}{dt} + u_c = E.$$

3. Определяем установившееся решение при $\frac{du_c}{dt} = 0$: $u_{cу} = E$, т.е. по окончании переходного процесса конденсатор зарядится до напряжения источника E .

4. Определяем свободное решение: $u_{cсв} = A \exp(st)$.

Из характеристического уравнения $\tau_1 s + 1 = 0$ найдем $s = \frac{-1}{\tau_1}$.

5. Полное решение: $u_c = u_{cу} + u_{cсв} = E + A \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)$.

6. Определяем коэффициент A из начальных условий: при $t = 0$: $u_c(0) = E + A = u_c(0_-) = 0$, т.е. $A = -E$.

7. Окончательное решение: $u_c = E \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right]$.

Тогда закон изменения тока при заряде конденсатора согласно (1.9)

$$i_3 = C \frac{du_c}{dt} = \frac{E}{R_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right).$$

Построим временные диаграммы законов изменения напряжения на емкости u_c и тока ее заряда i_3 (рис. 4.4).

Аналогично рассмотрим свободный процесс разряда емкости на резистор R_2 (ключ K_1 в положении 2).

1. Пусть за время заряда до момента коммутации ключей t_k конденсатор C успел зарядиться до напряжения U_0 , т.е. начальные условия ненулевые: $u_c(0_-) = u_c(0) = U_0$.

2. Из схемы разряда конденсатора по второму закону Кирхгофа с учетом (1.9) получим дифференциальное уравнение

$$i_p R_2 + u_c = 0, \quad \text{или} \quad R_2 C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

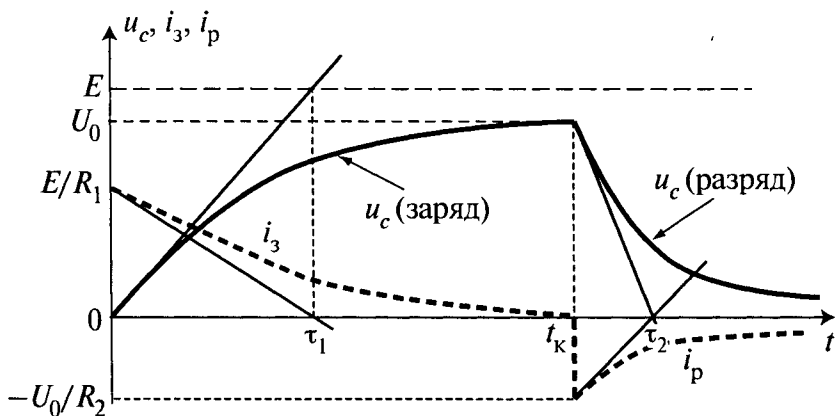


Рис. 4.4

Обозначим $R_2C = \tau_2$ и назовем *постоянной времени разряда*. Тогда получим дифференциальное уравнение в классической форме:

$$\tau_2 \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

3. При $\frac{du_c}{dt} = 0$ установившееся решение $u_{cy} = 0$, т.е. конденсатор разрядится полностью.

4. Свободное решение: $u_{cсв} = A \exp(st)$.

Из характеристического уравнения $\tau_2 s + 1 = 0$ находим $s = \frac{-1}{\tau_2}$.

5. Полное решение: $u_c = u_{cy} + u_{cсв} = A \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)$.

6. При $t = 0$: $u_c(0) = A = u_c(0_-) = U_0$, т.е. $A = U_0$.

7. Окончательно законы изменения напряжения и тока при разряде конденсатора примут вид:

$$u_c = U_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right); \quad i_p = C \frac{du_c}{dt} = \frac{-U_0}{R_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right).$$

Временные диаграммы этих законов (начиная с момента t_k) приведены на рис. 4.4.

Таким образом, процесс заряда и разряда емкости осуществляется по экспоненциальному закону без скачков напряжения и со скачками тока в момент коммутации.

4.2. Операторный метод анализа переходных процессов

4.2.1. Преобразования Лапласа и их свойства

При большом числе реактивных элементов в ЭЦ возрастает порядок дифференциального уравнения n , поэтому классический метод анализа переходных процессов становится громоздким. В этом случае более удобен операторный метод анализа, который использует не дифференциальные уравнения с оригиналами, а алгебраические уравнения с изображениями по Лапласу, решение которых проще.

Функцию $v(t)$ называют *оригиналом*, а функцию $V(s)$ — *изображением по Лапласу*:

$$V(s) = \int_0^{\infty} v(t) \exp(-st) dt; \quad v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} V(s) \exp(st) ds. \quad (4.5)$$

Соответствие между ними обозначим так: $v(t) \leftrightarrow V(s)$.

При переходе от оригиналов к изображениям и наоборот часто используют следующие **свойства преобразований Лапласа**:

$$K \leftrightarrow \frac{K}{s} \quad (K — \text{const}); \quad (4.6)$$

$$Kv(t) \leftrightarrow KV(s); \quad (4.7)$$

$$\sum_i v_i(t) \leftrightarrow \sum_i V_i(s); \quad (4.8)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow sV(s); \quad (4.9)$$

$$\int v(t) dt \leftrightarrow \frac{V(s)}{s}. \quad (4.10)$$

Для наиболее распространенных оригиналов $v(t)$ и их изображений по Лапласу $V(s)$ установлена табличная взаимосвязь. Некоторые часто используемые оригиналы и их изображения приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
2	$A \cdot 1(t)$	$\frac{A}{s}$
3	$\frac{d1(t)}{dt}$	1
4	$t \cdot 1(t)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$\exp(-at)$	$\frac{1}{s+a}$
6	$-a \exp(-at)$	$\frac{s}{s+a}$
7	$-t \exp(-at)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{a} [1 - \exp(-at)]$	$\frac{1}{s(s+a)}$
9	$\frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
10	$\frac{b \exp(-bt) - a \exp(-at)}{b-a}$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{ab} + \frac{\frac{1}{b} \exp(-bt) - \frac{1}{a} \exp(-at)}{b-a}$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

4.2.2. Операторные схемы замещения идеализированных элементов

Используя свойства преобразований Лапласа (4.6)—(4.10), рассмотрим операторные схемы замещения идеализированных элементов.

Согласно (4.6) постоянные параметры идеализированных источников имеют следующие изображения:

$$E \leftrightarrow E(s) = \frac{E}{s}; \quad I \leftrightarrow I(s) = \frac{I}{s}.$$

Отношение изображений напряжения $U(s)$ и тока $I(s)$ по закону Ома есть *операторное сопротивление* $Z(s)$ или *операторная проводимость* $Y(s)$.

Операторные сопротивления (проводимости) пассивных идеализированных элементов:

- для резистивного элемента $u = Ri$ и согласно свойству (4.7) $U(s) = RI(s)$. Тогда

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_r(s) = R; \quad Y_r(s) = \frac{1}{R} = G.$$

Следовательно, *операторное сопротивление (проводимость) резистивного элемента совпадает с его электрическим сопротивлением (проводимостью);*

- для индуктивного элемента $u_l = L \frac{di}{dt}$ и согласно свойству (4.9) $U(s) = LsI(s)$. Тогда

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_l(s) = sL; \quad Y_l(s) = \frac{1}{sL};$$

- для емкостного элемента $i = C \frac{du_c}{dt}$ и согласно свойству (4.9) $I(s) = CsU(s)$. Тогда

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_c(s) = \frac{1}{sC}; \quad Y_c(s) = sC.$$

Операторные сопротивления (проводимости) реактивных элементов являются обобщением комплексных сопротивлений (проводимостей), т.е. любые комплексные величины — это частный случай операторных величин при $s = j\omega$.

Операторная схема замещения реактивного элемента:

- при нулевых начальных условиях совпадает с его обычной схемой замещения;
- при ненулевых начальных условиях дополняется источником тока или напряжения, учитывающего начальный ток в индуктивности I_0 (рис. 4.5, а) или начальное напряжение на емкости U_0 (рис. 4.5, б):

$$\text{а) } I'_l(s) = I_l(s) + \frac{I_0}{s}; \quad E_0(s) = \frac{I_0}{s} sL = I_0 L; \quad (4.11)$$

$$U'_l(s) = U_l(s) - E_0(s);$$

$$\text{б) } U'_c(s) = U_c(s) + \frac{U_0}{s}; \quad I_0(s) = \frac{U_0/s}{1/(sC)} = U_0 C; \quad (4.12)$$

$$I'_c(s) = I_c(s) - I_0(s).$$

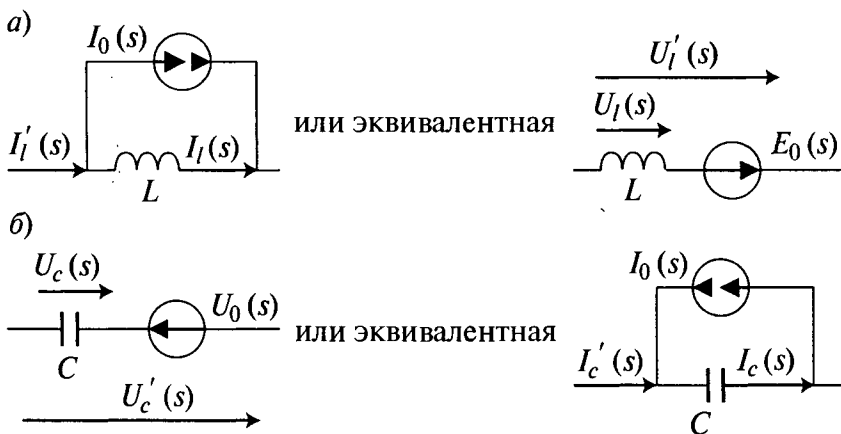


Рис. 4.5

Например, для последовательной схемы цепи (рис. 4.6) при ненулевых начальных условиях операторная форма второго закона Кирхгофа примет вид

$$\frac{E}{s} + LI_0 - \frac{U_0}{s} = I(s) \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right). \quad (4.13)$$

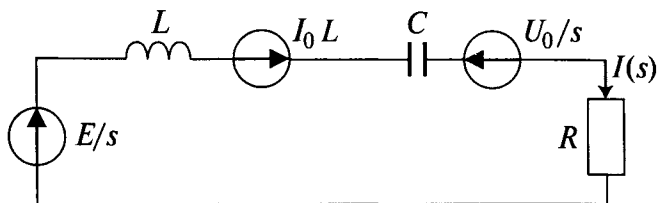


Рис. 4.6

4.2.3. Алгоритм операторного метода анализа переходных процессов

Алгоритм операторного метода анализа включает пять пунктов:

1. *Определение начальных условий* для оригиналов тока через индуктивность или напряжения на емкости.
2. *Составление операторной схемы замещения* ЭЦ после коммутации с учетом начальных условий.
3. *Составление алгебраического уравнения* по законам Кирхгофа для операторной схемы замещения.
4. *Решение алгебраических уравнений* относительно $I(s)$ и $U(s)$ и *приведение решений к табличному виду* для изображений.
5. *Переход по таблице соответствия от изображений к оригиналам решений* $i(t)$ и $u(t)$ и *построение их временных диаграмм*.

Рассмотрим этот алгоритм на примере схемы заряда-разряда емкости (см. рис. 4.3).

Заряд емкости через резистор R_1 :

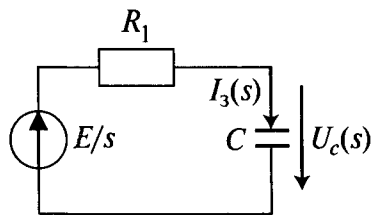


Рис. 4.7

1. Полагаем, что до коммутации емкость была разряжена: $U_0 = 0$.

2. Составляем операторную схему замещения цепи заряда емкости (рис. 4.7).

Постоянная времени заряда $\tau_1 = R_1 C$.

3. Составляем алгебраическое уравнение для этой схемы. Из (4.13) в частном случае получим:

$$\frac{E}{s} = I_3(s) \left(R_1 + \frac{1}{sC} \right).$$

4. Решаем это уравнение относительно тока $I_3(s)$ и приводим его к табличному виду:

$$I_3(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{E}{R_1} \frac{1}{s + \frac{1}{R_1 C}} = \frac{E}{R_1} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}}.$$

Тогда
$$U_c(s) = I_3(s) \frac{1}{sC} = \frac{E}{R_1 C} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau_1} \right)} = \frac{E}{\tau_1} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau_1} \right)}.$$

5. Переходя от изображений к оригиналам по табл. 4.1 (строки 5 и 8) и с учетом свойства (4.7), получаем

$$i_3(t) = \frac{E}{R_1} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right); \quad u_c(t) = E \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right],$$

что совпадает с выражениями, полученными классическим методом (см. 4.1.2).

Разряд емкости через резистор R_2 :

1. Полагаем, что во время процесса заряда емкость успела зарядиться до напряжения U_0 , т.е. $u_c(0_-) = U_0$.

2. Составляем операторную схему замещения цепи разряда емкости (рис. 4.8).

Постоянная времени разряда $\tau_2 = R_2 C$.

3. Составляем алгебраическое уравнение для этой схемы. Из (4.13) в частном случае получим:

$$\frac{-U_0}{s} = I_p(s) \left(R_2 + \frac{1}{sC} \right).$$

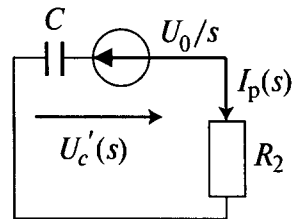


Рис. 4.8

4. Решаем это уравнение относительно $I_p(s)$ и приводим его к табличному виду:

$$I_p(s) = \frac{-U_0}{s} \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{-U_0}{R_2} \frac{1}{s + \frac{1}{R_2C}} = \frac{-U_0}{R_2} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_2}}.$$

Тогда изображение напряжения на емкости (4.12) с учетом ненулевых начальных условий

$$\begin{aligned} U'_c(s) &= I_p(s) \frac{1}{sC} + \frac{U_0}{s} = \frac{-U_0}{R_2} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_2}} \frac{1}{sC} + \frac{U_0}{s} = \\ &= U_0 \left(\frac{-1}{s \tau_2 \left(s + \frac{1}{\tau_2} \right)} + \frac{1}{s} \right) = \frac{U_0}{s + \frac{1}{\tau_2}}. \end{aligned}$$

5. Переходя от изображений к оригиналам по табл. 4.1 (строка 5) и с учетом свойства (4.7), получаем

$$i_p(t) = \frac{-U_0}{R_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right);$$

$$u'_c(t) = U_0 \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right),$$

что также совпадает с результатами классического метода анализа (см. 4.1.2).

Преимущества операторного метода особенно проявляются при большом порядке цепей, т.е. при большом порядке дифференциальных уравнений, описывающих динамические (переходные) процессы в этих цепях.

4.3. Временные характеристики электрических цепей

4.3.1. Единичные воздействия и отклики на них

При анализе переходных процессов во времени (временном анализе) используют **непериодические элементарные воздействия** типа:

- *единичный скачок*, или функция Хевисайда (рис. 4.9, а)

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > t_0; \\ 0,5 & \text{при } t = t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0; \end{cases} \quad (4.14)$$

- *единичный импульс*, или функция Дирака (рис. 4.9, б)

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = t_0; \\ 0 & \text{при } t \neq t_0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Причем $\int \delta(t) dt = 1$, т.е. площадь единичного импульса равна 1.

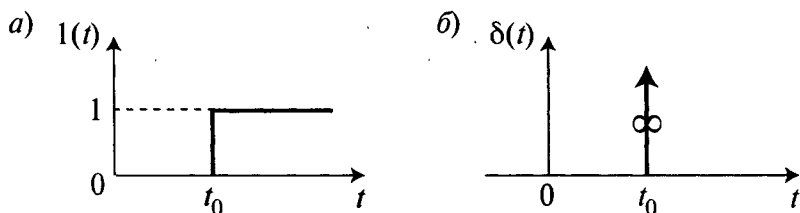


Рис. 4.9

Между функциями Хевисайда и Дирака существует однозначная взаимосвязь:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad 1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt. \quad (4.16)$$

Отклик (реакцию) электрической цепи на единичные воздействия называют **временными характеристиками**, при этом различают:

- *переходную характеристику* $h_1(t)$ — отклик на единичный скачок $1(t)$;
- *импульсную характеристику* $h_\delta(t)$ — отклик на единичный импульс $\delta(t)$.

Аналогично взаимосвязи воздействий (4.16) существует взаимосвязь между откликами:

$$h_\delta(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}; \quad h_1(t) = \int_{-\infty}^t h_\delta(t) dt. \quad (4.17)$$

Согласно табл. 4.1 (строки 1 и 3) изображением единичного скачка является величина $1/s$, а изображением единичного импульса $\delta(t)$ — величина 1. Поэтому единичный импульс удобен при спектральном и временном анализе.

Переходная характеристика $h_1(t)$ непосредственно характеризует вынужденный переходный процесс в ЭЦ.

4.3.2. Операторные передаточные и временные характеристики АПЦ-1 (билинов)

Отношение изображения отклика цепи $V_2(s)$ к изображению воздействия $V_1(s)$ называют *операторной передаточной характеристикой* (ОПХ) этой цепи:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}. \quad (4.18)$$

Тогда $V_2(s) = V_1(s) H(s)$. При использовании в качестве воздействия единичного скачка $1(t)$, изображение которого $V_1(s) = 1/s$, изображение *переходной характеристики* получим в виде $V_h(s) = \frac{1}{s} H(s)$, т.е. $h_1(t) \leftrightarrow \frac{H(s)}{s}$.

При использовании в качестве воздействия единичного импульса $\delta(t)$, изображение которого $V_1(s) = 1$, изображение *импульсной характеристики* совпадает с ОПХ: $V_\delta(s) = 1 \cdot H(s) = H(s)$, т.е. $h_\delta(t) \leftrightarrow H(s)$.

Переходя по табл. 4.1 от изображений к оригиналам, получим выражения для переходной и импульсной характеристик произвольной цепи.

Используем подобный подход для определения переходной и импульсной характеристик билинов. Рассмотрим **ОПХ по напряжению для простейших билинов**:

1) **звенья НЧ-1** (рис. 4.10). Используем правило делителя напряжения для каждой из схем, т.е. отношение напряжений заменим отношением сопротивлений, на которых они действуют. Тогда соответственно получим:

$$а) H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s\tau};$$

$$б) H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + s\tau}.$$

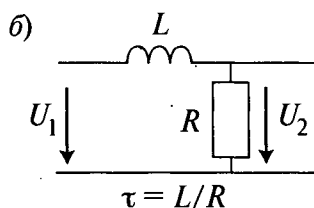
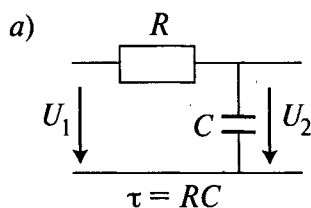


Рис. 4.10

Таким образом, для звеньев НЧ-1

$$H(s) = \frac{1}{1 + s\tau}; \quad (4.19)$$

2) **звенья ВЧ-1** (рис. 4.11). Используем правило делителя напряжения для каждой из схем, т.е. отношение напряжений заменим отношением сопротивлений, на которых они действуют. Тогда соответственно получим:

$$а) H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{s\tau}{1 + s\tau};$$

$$б) H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sL}{R + sL} = \frac{s \frac{L}{R}}{1 + s \frac{L}{R}} = \frac{s\tau}{1 + s\tau}.$$

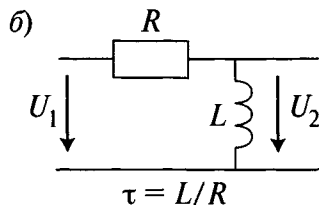
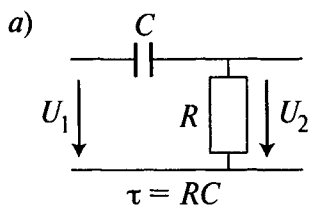


Рис. 4.11

Таким образом, для звеньев ВЧ-1

$$H(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau}. \quad (4.20)$$

Найдем **переходную и импульсную характеристики билинов:**

1) **звенья НЧ-1.** С учетом (4.19) получим

$$V_h(s) = \frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + s\tau} = \frac{1}{s} \frac{1/\tau}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1/\tau}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}.$$

Согласно табл. 4.1 (строка 8) переходная характеристика звеньев НЧ-1

$$h_1(t) = \frac{1}{\tau} \tau \left[1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) \right] = 1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (4.21)$$

Аналогично $V_\delta(s) = H(s) = \frac{1}{1 + s\tau} = \frac{1/\tau}{s + \frac{1}{\tau}}.$

Согласно табл. 4.1 (строка 5) или проинтегрировав (4.21), получим импульсную характеристику звеньев НЧ-1:

$$h_\delta(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (4.22)$$

Графики переходной и импульсной характеристик звеньев НЧ-1 приведены на рис. 4.12;

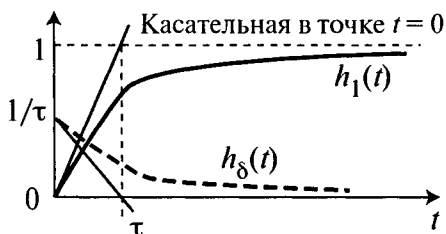


Рис. 4.12

2) звенья ВЧ-1. С учетом (4.20) получим

$$V_h(s) = \frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s} \frac{s\tau}{1+s\tau} = \frac{1}{s} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}.$$

Согласно табл. 4.1 (строка 5), переходная характеристика звеньев ВЧ-1

$$h_1(t) = \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (4.23)$$

Аналогично $V_\delta(s) = H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}}$.

Согласно табл. 4.1 (строка 6) или продифференцировав (4.23), получим импульсную характеристику звеньев ВЧ-1:

$$h_\delta(t) = \frac{-1}{\tau} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right). \quad (4.24)$$

Графики переходной и импульсной характеристик звеньев ВЧ-1 приведены на рис. 4.13.

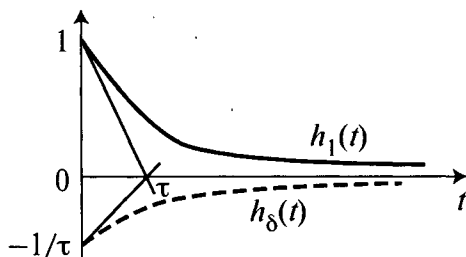


Рис. 4.13

4.3.3. Временные характеристики АПЦ-2 (биквадов)

Для определения временных характеристик АПЦ-2 по методике, рассмотренной в п. 4.3.2, необходимо найти ОПХ $H(s)$ каждого биквада, для чего удобно представить АПЦ-2 как каскадное соединение двух звеньев АПЦ-1 с ОПХ $H_1(s)$ и $H_2(s)$, т.е. $H(s) = H_1(s)H_2(s)$.

Найдем **переходные характеристики биквадов**.

Для НЧ-2 при каскадном соединении двух звеньев НЧ-1 с учетом (4.19) получим

$$H(s) = \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}} \cdot \frac{1}{\tau_2} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_2}} = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}.$$

При воздействии типа «единичный скачок» изображение отклика

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)} = \\ &= \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}. \end{aligned}$$

Согласно табл. 4.1 (строка 11), получим оригинал отклика, т.е. переходную характеристику звена НЧ-2:

$$h_1(t) = 1 + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right). \quad (4.25)$$

Таким образом, переходная характеристика звена НЧ-2 является алгебраической суммой единицы и «взвешенных» экспонент 1 и 2, а график переходной характеристики звена НЧ-2 (рис. 4.14) аналогичен графику

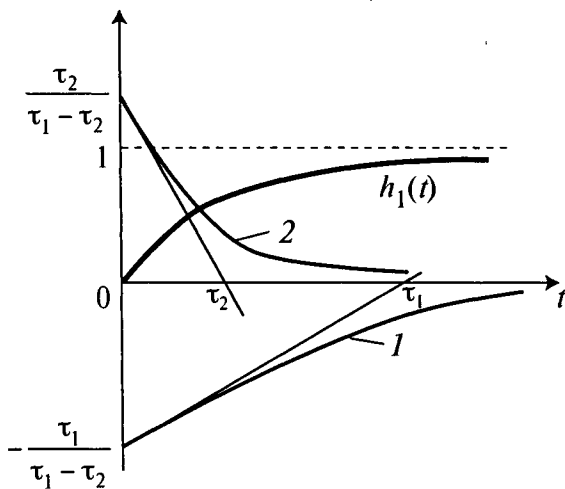


Рис. 4.14

переходной характеристики звена НЧ-1 (рис. 4.12), причем $h_1(t=0) = 0$.

Для ВЧ-2 при каскадном соединении двух звеньев ВЧ-1 с учетом (4.20) получим

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_1}} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_2}} = \frac{s^2}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}.$$

При воздействии типа «единичный скачок» изображение отклика

$$V_2(s) = \frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s} \frac{s^2}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)} = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}.$$

Согласно табл. 4.1 (строка 10), получим оригинал отклика, т.е. переходную характеристику звена ВЧ-2:

$$h_1(t) = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right). \quad (4.26)$$

Таким образом, переходная характеристика звена ВЧ-2 является алгебраической суммой «взвешенных» экспонент 1 и 2, а график переходной характеристики

звена ВЧ-2 (рис. 4.15) аналогичен графику переходной характеристики звена ВЧ-1 (рис. 4.13), причем $h_1(0) = 1$.

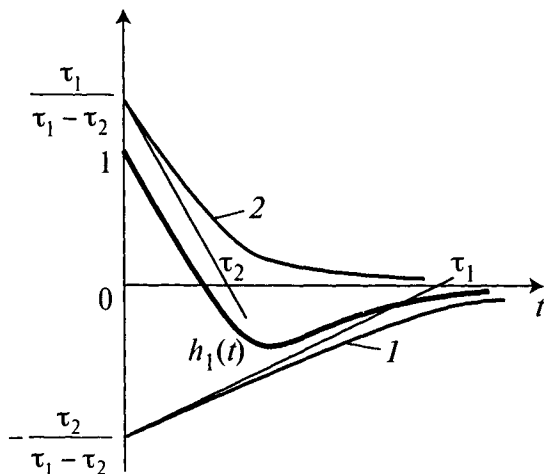


Рис. 4.15

Для **полосового звена** при каскадном соединении звеньев НЧ-1 и ВЧ-1 с учетом (4.19) и (4.20) получим

$$H(s) = \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau_2}} = \frac{s}{\tau_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}.$$

При воздействии типа «единичный скачок» изображение отклика

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{1}{s} H(s) = \frac{1}{s} \frac{s}{\tau_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)} = \\ &= \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right)}. \end{aligned}$$

Согласно табл. 4.1 (строка 9) получим оригинал отклика, т.е. переходную характеристику полосового звена:

$$h_1(t) = \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left[\exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right]. \quad (4.27)$$

Таким образом, переходная характеристика полосового звена является алгебраической суммой «взвешенных» экспонент 1 и 2, а график переходной характеристики полосового звена имеет вид, приведенный на рис. 4.16.

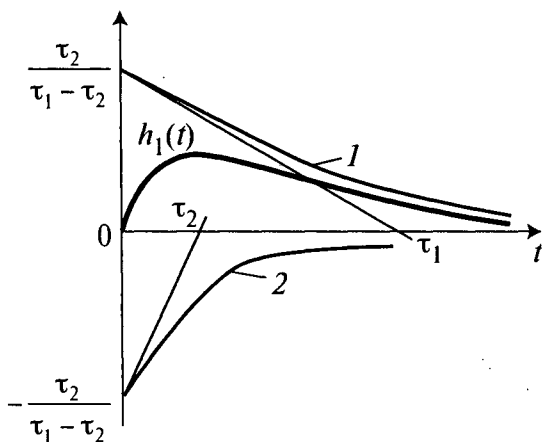


Рис. 4.16

Импульсные характеристики звеньев НЧ-2, ВЧ-2 и полосового звена могут быть получены аналогично или путем дифференцирования их переходных характеристик [см. (4.17)].

4.3.4. Временной метод анализа переходных процессов

Анализ переходных процессов может осуществляться не только при *единичных воздействиях* путем определения временных (переходной и импульсной) характеристик, но также и при «взвешенных» *единичных скачках*, т.е. взятых с весом E . При воздействии $E(t) = E \cdot 1(t)$ откликом является «взвешенная» **переходная характеристика** $E h_1(t)$.

Если произвольное воздействие представить (разложить) в виде совокупности (например, суммы) «взвешенных» *единичных скачков*, т.е. в виде ступенчатого

воздействия, то отклик линейной ЭЦ, в соответствии с принципом суперпозиции, может быть представлен совокупностью (суммой) «взвешенных» переходных характеристик, полученных для каждого единичного скачка, входящего в разложение произвольного воздействия.

Пусть задано произвольное воздействие $v_1(t)$ (рис. 4.17). «Взвешенные» единичные скачки с весом Δv_i берем через равные промежутки Δt . Весь интервал разложения содержит n промежутков Δt .

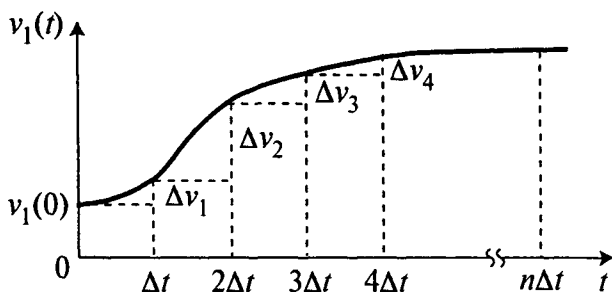


Рис. 4.17

В этом случае *ступенчатое воздействие*

$$v_{\text{лст}}(t) = v_1(0) \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^n \Delta v_i \cdot 1(t - i \Delta t),$$

тогда «ступенчатый» отклик цепи

$$v_{2\text{ст}}(t) = v_1(0) h_1(t) + \sum_{i=1}^n \Delta v_i h_1(t - i \Delta t).$$

Поскольку произвольное воздействие $v_1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{лст}}(t)$, то отклик также равен

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{2\text{ст}}(t) = \\ &= v_1(0) h_1(t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n \Delta v_i h_1(t - i \Delta t) \right] = \\ &= v_1(0) h_1(t) + \int_0^t \frac{dv_1(\tau)}{d\tau} h_1(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Выражение (4.28) называют *интегралом Дюамеля*, который может быть представлен еще в четырех формах через функцию $h_1(t)$ и в двух формах через функцию $h_\delta(t)$, например:

$$v_2(t) = v_1(t) h_1(0) + \int_0^t v_1(t) h_\delta(t - \tau) d\tau. \quad (4.29)$$

Пример. Пусть экспоненциальный сигнал $v_1(t) = \exp(-t/\tau_c)$ подается на вход звена ВЧ-1 с переходной характеристикой цепи $h_1(t) = \exp(-t/\tau_u)$, при этом $\tau_c = 5$ с и $\tau_u = 2$ с. Тогда согласно (4.28) получим отклик на выходе звена ВЧ-1

$$\begin{aligned} v_2(t) &= v_1(0) h_1(t) + \int_0^t \frac{dv_1(t)}{dt} h_1(t - \tau) d\tau = \\ &= 1 \cdot \exp(-t/\tau_u) + \int_0^t \frac{-1}{\tau_c} \exp(-t/\tau_c) \exp[-(t - \tau)/\tau_u] d\tau = \\ &= \exp(-t/\tau_u) - \frac{\tau_u}{\tau_c} \exp(-t/\tau_c) + \frac{\tau_u}{\tau_c} \exp\left[-t \frac{\tau_c + \tau_u}{\tau_c} \tau_u\right]. \end{aligned}$$

Временные диаграммы входного и выходного сигналов примут вид, приведенный на рис. 4.18.

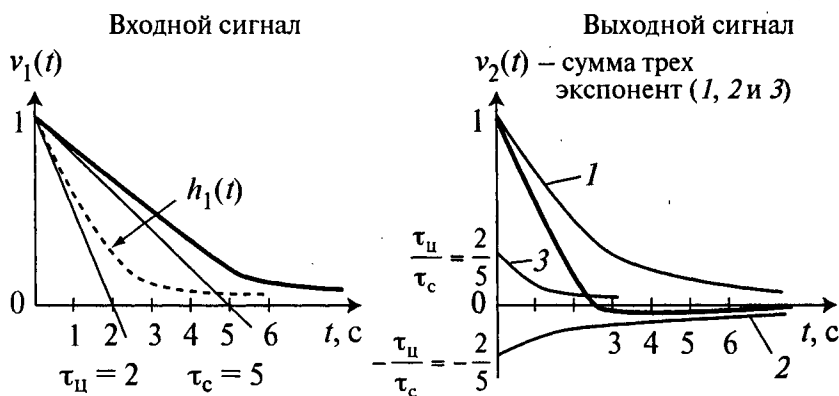


Рис. 4.18

4.4. Временные характеристики колебательных контуров

Используя классический метод анализа переходных процессов, найдем временные характеристики одиночных колебательных контуров. При воздействии типа «единичный скачок» $1(t)$ откликом любой цепи является переходная характеристика $h_1(t)$.

4.4.1. Временные характеристики последовательного контура

Для последовательного колебательного контура в качестве отклика рассмотрим напряжение на емкости (рис. 4.19), т.е. $h_1(t) = u_c(t)$.

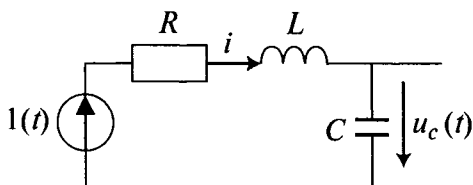


Рис. 4.19

Согласно классическому методу анализа переходных процессов:

1. Полагаем начальные условия нулевыми, т.е. $u_c(0_-) = u_c(0) = 0$.

2. Составляем дифференциальное уравнение после подключения источника $1(t)$:

$$u_r(t) + u_l(t) + u_c(t) = 1(t); \quad i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) = 1(t).$$

Так как $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$, то

$$RC \frac{du_c(t)}{dt} + LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = 1(t).$$

После преобразований, опуская аргумент t для упрощения записи, получаем

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{LC}.$$

3. Вынужденное решение (при $d/dt = 0$): $u_{cв} = u_c = 1$.

4. Свободное решение: $u_{cсв} = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$.

Характеристическое уравнение: $s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0$, где $2\sigma = R/L$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$. Поскольку $\sigma < \omega_0$, то в колебательных контурах корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_c$, где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$ — собственная частота контура.

5. Полное решение:

$$u_c = u_{cв} + u_{cсв} = 1 + A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t).$$

6. Определяем коэффициенты A_1 и A_2 из начальных условий:

$$\text{при } t = 0: u_c(0) = 1 + A_1 + A_2 = 0.$$

Для определения двух неизвестных величин необходимо составить еще одно независимое уравнение, для чего продифференцируем полное решение:

$$\frac{du_c}{dt} = A_1 s_1 \exp(s_1 t) - A_2 s_2 \exp(s_2 t).$$

$$\text{При } t = 0: \frac{du_c(0)}{dt} = A_1 s_1 + A_2 s_2.$$

Поскольку $i(0) = C \frac{du_c(0)}{dt} = 0$, так как до коммута-

ции тока в цепи не было, а ток через индуктивность в момент коммутации скачком измениться не может, то $A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0$.

Решая совместно систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + A_1 + A_2 = 0; \\ A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0, \end{cases}$$

получим:

$$A_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2}; \quad A_2 = \frac{-s_1}{s_1 - s_2}.$$

7. Записываем окончательное решение, подставляя коэффициенты A_1 , A_2 и корни $s_1 = -\sigma + j\omega_c$, $s_2 = -\sigma - j\omega_c$:

$$\begin{aligned} h_1(t) = u_c(t) &= 1 + \frac{s_2}{s_1 - s_2} \exp(s_1 t) - \\ &- \frac{s_1}{s_1 - s_2} \exp(s_2 t) = 1 + \frac{\exp(-\sigma t)}{2j\omega_c} \times \\ &\times [(-\sigma - j\omega_c) \exp(j\omega_c t) - (-\sigma + j\omega_c) \exp(-j\omega_c t)]. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемым

$$\sigma [\exp(j\omega_c t) - \exp(-j\omega_c t)]$$

(так как $\sigma \ll \omega_c$), получим

$$\begin{aligned} h_1(t) &= 1 + \frac{\exp(-\sigma t)}{2j\omega_c} [-j\omega_c \exp(j\omega_c t) - j\omega_c \exp(-j\omega_c t)] = \\ &= 1 - \frac{\exp(-\sigma t)}{2} [\exp(j\omega_c t) + \exp(-j\omega_c t)] = \\ &= 1 - \exp(-\sigma t) \cos(\omega_c t). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Импульсную характеристику последовательного контура получим путем дифференцирования его переходной характеристики:

$$h_8(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} \approx \omega_c \exp(-\sigma t) \sin(\omega_c t).$$

Графики полученных переходной $h_1(t)$ и импульсной $h_8(t)$ характеристик приведены на рис. 4.20.

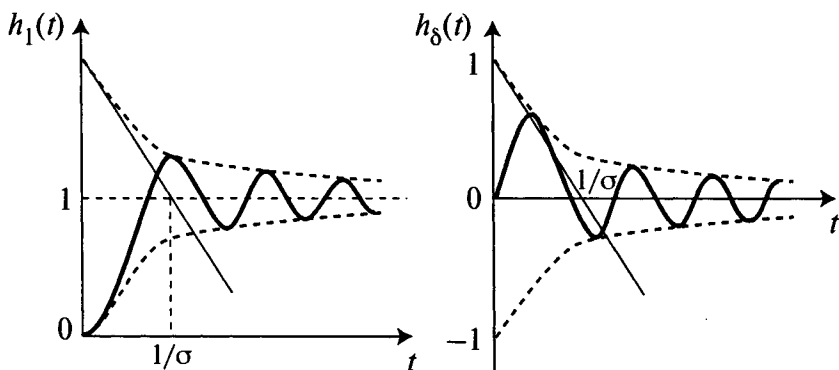


Рис. 4.20

4.4.2. Временные характеристики параллельного контура

Для параллельного колебательного контура в качестве отклика рассмотрим напряжение на емкости (рис. 4.21), т.е. $h_1(t) = u_c(t)$.

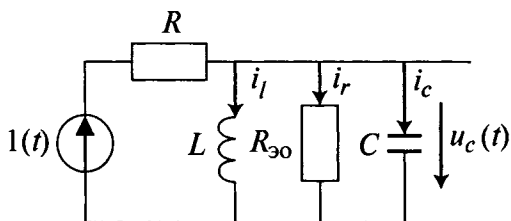


Рис. 4.21

Заменим источник напряжения эквивалентным источником тока (рис. 4.22).

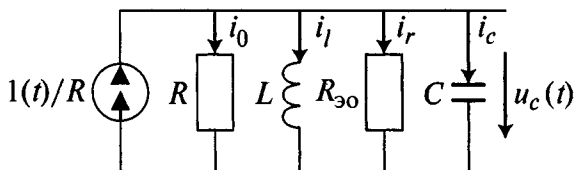


Рис. 4.22

Согласно классическому методу анализа переходных процессов:

1. Полагаем начальные условия нулевыми, т.е. $u_c(0_-) = u_c(0) = 0$.

2. Составляем дифференциальное уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$i_0 + i_c + i_r + i_l = \frac{l(t)}{R}; \quad \frac{u_c}{R} + C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R_{30}} + \frac{1}{L} \int u_c dt = \frac{l(t)}{R}.$$

После дифференцирования и деления на C получаем

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R + R_{30}}{R R_{30} C} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{RC} \frac{dl(t)}{dt}.$$

Обозначим $\frac{R + R_{30}}{R R_{30}} = \frac{1}{R_3}$, тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{R_3 C} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c = \frac{1}{RC} \frac{dl(t)}{dt}.$$

3. Вынужденное решение: $u_{cB} = 0$ при всех $d/dt = 0$.

4. Свободное решение: $u_{cCB} = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t)$.

Характеристическое уравнение: $s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0$, где

$2\sigma = \frac{1}{R_3 C}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. Так как $\sigma < \omega_0$, то в колебательных

контурах корни характеристического уравнения комп-

лексные, т.е. $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_c$, где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$.

5. Полное решение:

$$u_c = u_{cB} + u_{cCB} = A_1 \exp(s_1 t) + A_2 \exp(s_2 t).$$

6. Определяем коэффициенты A_1 и A_2 при заданных начальных условиях:

при $t = 0$: $u_c(0) = A_1 + A_2 = 0$, т.е. $A_1 = -A_2 = A$.

Тогда $u_c = A [\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)]$.

Продифференцируем полное решение:

$$\frac{du_c(t)}{dt} = A [s_1 \exp(s_1 t) - s_2 \exp(s_2 t)].$$

$$\text{При } t = 0: \frac{du_c(0)}{dt} = A(s_1 - s_2).$$

Поскольку $i_c(0) = C \frac{du_c(0)}{dt} = \frac{1(0)}{R}$, так как в момент коммутации при нулевых начальных условиях емкость представляет собой короткое замыкание (см. законы коммутации в 4.1.1), то $\frac{du_c(0)}{dt} = A(s_1 - s_2) = \frac{1(0)}{RC}$.

$$\text{Следовательно, } A = \frac{1}{RC(s_1 - s_2)}.$$

7. Записываем окончательное решение, подставляя коэффициенты A_1, A_2 и корни $s_1 = -\sigma + j\omega_c$, $s_2 = -\sigma - j\omega_c$:

$$\begin{aligned} h_1(t) = u_c &= \frac{1}{RC(s_1 - s_2)} [\exp(s_1 t) - \exp(s_2 t)] = \\ &= \frac{\exp(-\sigma t)}{2j\omega_c RC} [\exp(j\omega_c t) - \exp(-j\omega_c t)] = \\ &= \frac{\exp(-\sigma t)}{\omega_c RC} \frac{\exp(j\omega_c t) - \exp(-j\omega_c t)}{2j} = \\ &= \frac{\exp(-\sigma t)}{\omega_c RC} \sin(\omega_c t). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Импульсную характеристику параллельного контура получим путем дифференцирования его переходной характеристики:

$$h_\delta(t) = \frac{dh_1(t)}{dt} \approx \frac{\exp(-\sigma t)}{RC} \cos(\omega_c t).$$

Графики временных характеристик $h_1(t)$ и $h_\delta(t)$ параллельного колебательного контура приведены на рис. 4.23.

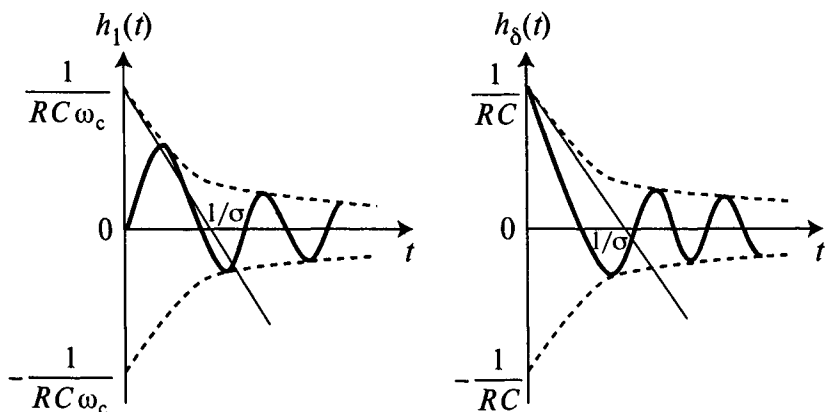


Рис. 4.23

Выводы:

1. Временные характеристики одиночных колебательных контуров имеют вид затухающих колебаний на собственной частоте ω_c .

2. При отсутствии потерь в контуре ($\sigma = 0$) колебания становятся незатухающими.

3. Время «установления» переходного процесса t_y определяется из условия: $\exp(-\sigma t_y) = 0,1$, т.е.

$$t_y = \frac{\ln 10}{\sigma} = \frac{2,3}{\sigma}.$$

4.5. Спектральное представление периодических воздействий

4.5.1. Спектры произвольных периодических воздействий

При анализе электрических цепей, кроме гармонического воздействия, используют также другие периодические и непериодические воздействия с априори известными параметрами (измерительные сигналы).

Для оценки отклика цепи на сложные измерительные периодические сигналы (воздействия) удобно представлять

их в виде совокупности простейших, например гармонических, сигналов (воздействий), для чего используется разложение произвольного периодического сигнала $v(t)$ с частотой $\Omega = 2\pi/T$ и конечной энергией на интервале времени от t_1 до t_2 в **тригонометрический ряд Фурье**:

$$v(t) = V_0 + V_{\sim} = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\Omega t + \psi_i), \quad (4.32)$$

где V_0 и V_{\sim} — постоянная и переменная составляющие.

При таком разложении совокупность амплитуд A_i гармонических составляющих (гармоник) на оси частот называют **амплитудно-частотным спектром (АЧС)**, а совокупность начальных фаз ψ_i на оси частот называют **фазочастотным спектром (ФЧС)** произвольного периодического сигнала $v(t)$. Например, для сигнала

$$v(t) = 4 + 5 \cos(\Omega t + 60^\circ) + 3 \cos(3\Omega t - 30^\circ) + 2 \cos(7\Omega t)$$

АЧС и ФЧС имеют вид, приведенный на рис. 4.24.

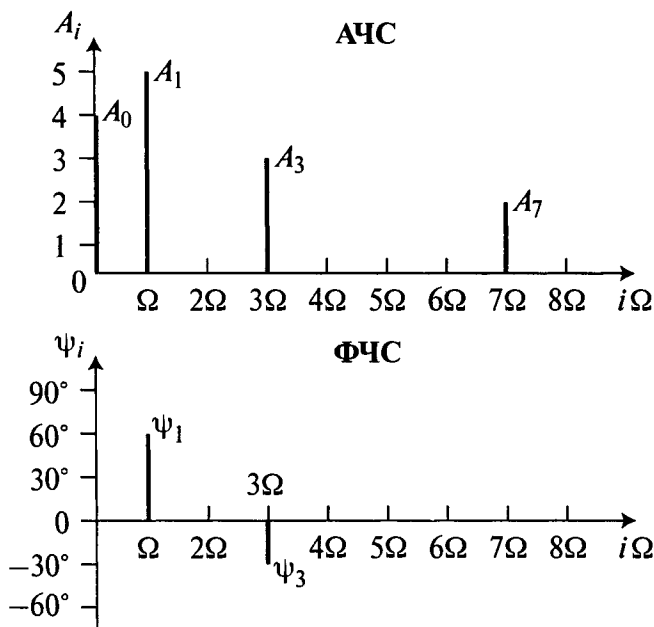


Рис. 4.24

Рассмотрим АЧС и ФЧС периодического однополярного воздействия произвольной формы, т.е. АЧС и ФЧС периодических видеосигналов (рис. 4.25).

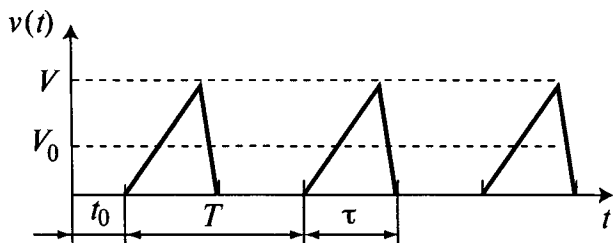


Рис. 4.25

Для воздействия $v(t)$ заданной формы известны:

- амплитуда $V(\text{В})$;
- длительность видеоимпульса τ (с);
- период следования видеоимпульсов T (с);
- угловая частота $\Omega = 2\pi/T$ (рад/с);
- начальное смещение t_0 (с);
- постоянная составляющая воздействия

$$V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt.$$

Тогда, согласно известному из курса математики преобразованию Фурье, амплитуды гармоник разложения (4.32) равны

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(i\Omega t + \psi_i) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) [\cos(i\Omega t) \cos \psi_i - \sin(i\Omega t) \sin \psi_i] dt = \\ &= \cos \psi_i \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(i\Omega t) dt - \sin \psi_i \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(i\Omega t) dt = \\ &= a_i \cos \psi_i - b_i \sin \psi_i, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_i = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(i\Omega t) dt; \quad (4.33)$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(i\Omega t) dt.$$

Представим полученное значение амплитуды A_i на плоскости в виде гипотенузы прямоугольного треугольника (рис. 4.26). Таким образом, $A_i = a_i \cos \psi_i + (-b_i) \sin \psi_i$.

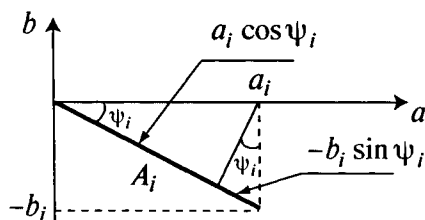


Рис. 4.26

При $i = 0$, т.е. для постоянной составляющей, получим

$$a_0 = A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) dt = 2V_0, \text{ т.е. } V_0 = \frac{A_0}{2}; \quad b_0 = 0.$$

Перенеся график амплитуды A_i на комплексную плоскость, получим комплексную амплитуду i -й гармоники в виде

$$\underline{A}_i = A_i \exp(j\psi_i) = a_i - jb_i. \quad (4.34)$$

Подставляя (4.33) в (4.34), получим

$$\begin{aligned} \underline{A}_i &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) [\cos(i\Omega t) - j \sin(i\Omega t)] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \exp(-ji\Omega t) dt = \frac{2}{T} F(ji\Omega), \end{aligned}$$

$$\text{где } F(ji\Omega) = \int_0^T v(t) \exp(-ji\Omega t) dt = F(i\Omega) \exp(-j\varphi_i). \quad (4.35)$$

Функцию $F(ji\Omega)$ называют *комплексной спектральной функцией* (КСФ) периодического видеосигнала $v(t)$.

Тогда комплексная амплитуда i -й гармоники

$$\underline{A}_i = A_i \exp(j\psi_i) = \frac{2}{T} F(i\Omega) \exp(-j\varphi_i),$$

т.е. $A_i = \frac{2}{T} F(i\Omega); \quad \psi_i = -\varphi_i.$ (4.36)

Таким образом, амплитуда i -й гармоники пропорциональна модулю КСФ, а начальная фаза равна отрицательному аргументу КСФ.

4.5.2. Спектры периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов

Пусть временная диаграмма такого воздействия имеет вид, приведенный на рис. 4.27.

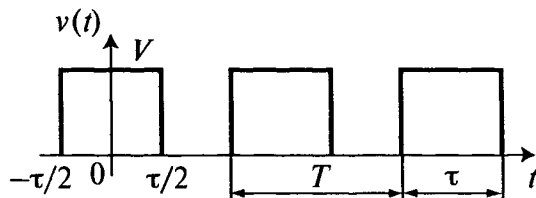


Рис. 4.27

Согласно (4.35) комплексная спектральная функция такого сигнала

$$\begin{aligned} F(ji\Omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} v(t) \exp(-ji\Omega t) dt = \frac{V \exp(-ji\Omega t) \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}}{-ji\Omega} = \\ &= \frac{V}{ji\Omega} \left[\exp\left(ji\Omega \frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(-ji\Omega \frac{\tau}{2}\right) \right] \frac{\tau/2}{\tau/2} = \\ &= \frac{V\tau \left[\exp\left(ji\Omega \frac{\tau}{2}\right) - \exp\left(-ji\Omega \frac{\tau}{2}\right) \right]}{2ji\Omega \frac{\tau}{2}} = V\tau \frac{\sin\left(i\Omega \frac{\tau}{2}\right)}{i\Omega \frac{\tau}{2}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Модуль КСФ

$$F(i\Omega) = V\tau \frac{\left| \sin\left(i\Omega \frac{\tau}{2}\right) \right|}{i\Omega \frac{\tau}{2}},$$

а ее аргумент $\varphi_i = k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, так как функция $\frac{\sin x}{x}$ меняет знак через целое число π (рис. 4.28).

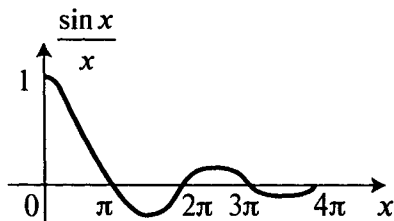


Рис. 4.28

Графики модуля и аргумента КСФ для заданной последовательности прямоугольных видеоимпульсов приведены на рис. 4.29.

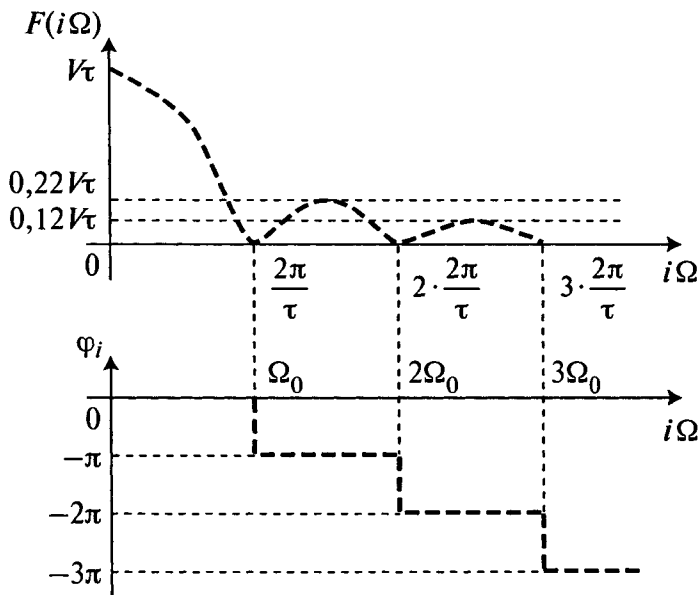


Рис. 4.29

Поскольку согласно (4.37) $F(ik\Omega_0) = 0$ при $k\Omega_0 \frac{\tau}{2} = k\pi$, то «нули» модуля КСФ соответствуют значениям частот $k\Omega_0 = k \frac{2\pi}{\tau}$; $k = 1, 2, \dots$, где k — номер «лепестка» функции $\frac{\sin x}{x}$ (см. рис. 4.28), а $\Omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ — ширина 1-го «лепестка» АЧС (см. рис. 4.29).

Используем понятие *скважности* периодической последовательности импульсов:

$$q = T/\tau.$$

Тогда согласно (4.36) получим АЧС и ФЧС периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов:

$$\text{АЧС: } A_i = \frac{2}{T} V \tau \frac{\left| \sin\left(i\Omega \frac{\tau}{2}\right) \right|}{i\Omega \frac{\tau}{2}} = \frac{2V}{q} \frac{\left| \sin\left(i \frac{\pi}{q}\right) \right|}{i \frac{\pi}{q}}; \quad (4.38)$$

$$\text{ФЧС: } \psi_i = -k\pi.$$

$$\text{Номера «нулей» АЧС: } k\Omega_0 = k \frac{2\pi}{\tau} \frac{T}{T} = k\Omega q.$$

Следовательно, частоты «нулей» АЧС пропорциональны угловой частоте Ω и скважности q , т.е. ширина 1-го «лепестка» АЧС $\Omega_0 = \Omega q$.

При временном сдвиге видеоимпульсов на величину t_0 ФЧС смещается на величину $\psi_0 = \Omega t_0$, т.е. $\psi_i = -(\psi_0 + k\pi)$.

Пример. Пусть $q = 4$. Тогда согласно (4.38) АЧС и ФЧС примут вид, приведенный на рис. 4.30.

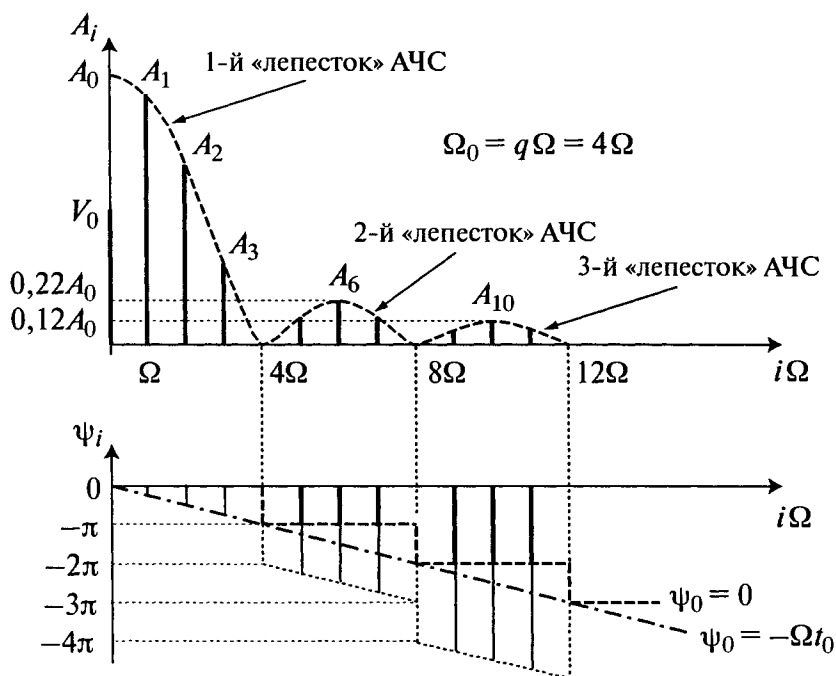


Рис. 4.30

Выводы:

1. АЧС и ФЧС периодических воздействий являются дискретными с интервалом между амплитудами гармоник $\Omega = 2\pi/T$, причем этот интервал от длительности импульсов τ не зависит.

2. Амплитуды гармоник АЧС с ростом частоты убывают, поэтому за ширину спектра периодического воздействия обычно берут ширину 1-го «лепестка» АЧС $\Omega_0 = 2\pi/\tau$, которая от периода T не зависит.

3. Составляющие ФЧС изменяются на величину π при переходе от «лепестка» к «лепестку» АЧС.

4. «Нули» АЧС и ФЧС пропорциональны скважности видеоимпульсов q , которая может быть и не целым числом.

4.6. Спектральный метод анализа переходных процессов

4.6.1. Преобразования Фурье и их свойства (теоремы о спектрах)

Преобразования Фурье есть частный случай преобразований Лапласа (4.5) при $s = j\omega$:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} v(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (4.39)$$

Выражение (4.39) называют *прямым преобразованием Фурье*, оно является частным случаем прямого преобразования Лапласа. Аналогично из обратного преобразования Лапласа получим *обратное преобразование Фурье*:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) dt. \quad (4.40)$$

Функция $F(j\omega) = F(\omega) \exp[j\psi(\omega)]$ есть *комплексная спектральная плотность* (КСП) сигнала $v(t)$. Ее модуль $F(\omega)$ есть *амплитудно-частотный спектр* (АЧС), а аргумент $\psi(\omega)$ — *фазочастотный спектр* (ФЧС) произвольного не периодического воздействия $v(t)$.

Преобразования Фурье (4.39) и (4.40) имеют ряд свойств, называемых теоремами о спектрах и используемых в практике спектрального анализа. Приведем без доказательства некоторые из этих теорем.

Теорема о сложении сигналов (воздействий). *Сумме сигналов соответствует сумма их КСП:*

$$\sum_i v_i(t) \leftrightarrow \sum_i F_i(j\omega). \quad (4.41)$$

Теорема о сдвиге сигнала (воздействия). *Сдвиг сигнала во времени изменяет только его ФЧС:*

$$\text{если } v(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ то } v(t - t_0) \leftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (4.42)$$

Теорема о смещении спектра. *Фазовый сдвиг сигнала приводит к смещению его КСП на оси частот:*

$$\text{если } v(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ то } v(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega - \omega_0)]. \quad (4.43)$$

Теорема об изменении масштаба сигнала (воздействия). *При сжатии (растяжении) сигнала во времени его КСП растягивается (сжимается) по частоте:*

$$\text{если } v(t) \leftrightarrow F(j\omega), \text{ то } v(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (4.44)$$

Теорема о свертке двух сигналов (воздействий). *КСП свертки двух сигналов равна произведению КСП этих сигналов:*

$$\text{если } v_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \text{ и } v_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega),$$

$$\text{то } v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t-\tau)d\tau \leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega). \quad (4.45)$$

Анализируя материал, изложенный в 4.3.2 [см. (4.22) и (4.24)], замечаем, что функции $h_\delta(t)$ соответствует изображение по Лапласу $H(s)$. Тогда в частном случае комплексная передаточная функция (КПФ) цепи $H(j\omega)$ связана с ее импульсной характеристикой $h_\delta(t)$ преобразованиями Фурье:

$$\begin{cases} H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\delta(t)\exp(-j\omega t)dt; \\ h_\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\exp(j\omega t)d\omega. \end{cases} \quad (4.46)$$

Тогда, согласно (4.45), интеграл Дюамеля (4.29) при $h_1(0) = 0$ (нулевые начальные условия) представляет собой «свертку» сигнала $v_1(t)$ и импульсной характеристики цепи $h_\delta(t)$:

$$v_2(t) = \int_0^{\infty} v_1(t)h_\delta(t-\tau)d\tau \leftrightarrow F_2(j\omega) = F_1(j\omega)H(j\omega).$$

Поэтому в цепи с заданной КПФ $H(j\omega)$ можно найти КСП $F_2(j\omega)$ отклика $v_2(t)$ на произвольное воздействие $v_1(t)$ с известной КСП $F_1(j\omega)$. Это позволяет применить *спектральный анализ* динамических (переходных) процессов, т.е. анализ прохождения спектров произвольных сигналов с конечной энергией через электрические цепи с заданной КПФ.

4.6.2. Спектры типовых воздействий

Рассмотрим АЧС типовых воздействий, широко используемых для анализа временных свойств цепей.

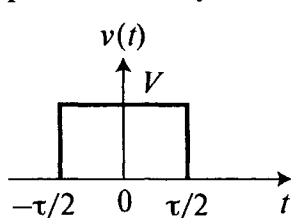


Рис. 4.31

1. **Одиночный прямоугольный импульс** (рис. 4.31): $v(t) = V$ при

$$-\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \text{ и равно } 0 \text{ при других } t.$$

Одиночное (непериодическое) воздействие может быть получено из периодического, если период $T \rightarrow \infty$ при постоянной амплитуде V

и длительности импульсов τ .

Поскольку $\Omega = 2\pi/T$, то при $T \rightarrow \infty$ получим:

1) $\Omega \rightarrow d\omega$, т.е. интервал между гармониками становится бесконечно малой величиной (гармоники «слипаются») и спектры (АЧС и ФЧС) становятся «сплошными», в отличие от дискретных АЧС и ФЧС для периодических воздействий;

2) $i\Omega \rightarrow \omega$, т.е. комплексная спектральная функция $F(ji\Omega)$ (4.35) преобразуется в комплексную спектральную плотность $F(j\omega)$ (4.39);

3) комплексная амплитуда

$$\underline{A}_i = \frac{2}{T} F(ji\Omega) = \frac{\Omega}{\pi} F(ji\Omega) \rightarrow \frac{d\omega}{\pi} F(j\omega) = d\underline{A}_i,$$

т.е. также становится бесконечно малой величиной.

Поскольку «нули» огибающей АЧС и ФЧС от периода T не зависят (см. 4.5.2), то их положение на оси частот при $T \rightarrow \infty$ остается неизменным. Тогда из (4.37)

при $T \rightarrow \infty$ получим АЧС одиночного прямоугольного импульса (рис. 4.32):

$$F(\omega) = V\tau \frac{\left| \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) \right|}{\omega \frac{\tau}{2}}. \quad (4.47)$$

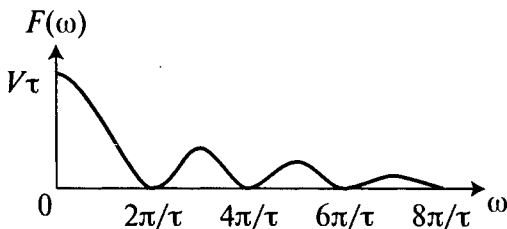


Рис. 4.32

2. **Единичный импульс:** $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} v(t)$, где $v(t)$ — одиночный прямоугольный импульс, для которого (по определению) $V\tau = 1$.

Тогда АЧС единичного импульса $F(\omega) = 1$ (рис. 4.33) получим из АЧС одиночного прямоугольного импульса при $\tau \rightarrow 0$ и $V\tau = 1$, т.е. АЧС единичного импульса

$$F(\omega) = 1(\omega). \quad (4.48)$$

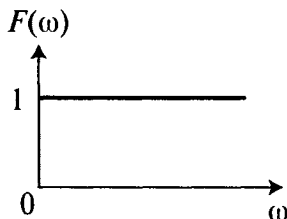


Рис. 4.33

3. **Экспоненциальный импульс** (рис. 4.34):

$$v(t) = V \exp(-\sigma t) = \begin{cases} V \exp(-t/\tau) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда, согласно (4.39), получим КСП:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{\infty} V \exp(-\sigma t) \exp(-j\omega t) dt = \\ &= V \frac{\exp[-(\sigma + j\omega)t]}{-(\sigma + j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{V}{\sigma + j\omega}. \end{aligned}$$

АЧС экспоненциального импульса (рис. 4.35):

$$F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}. \quad (4.49)$$

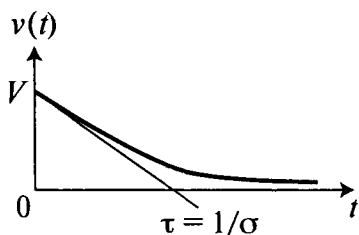


Рис. 4.34

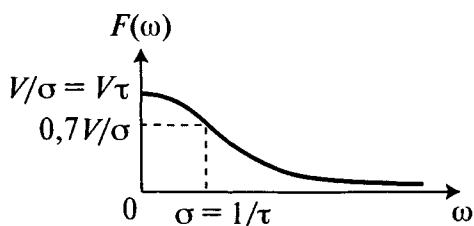


Рис. 4.35

4. **Единичный скачок** (рис. 4.36) — это «выпрямленная» экспонента при $V = 1$ и $\sigma \rightarrow 0$: $1(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} [\exp(-\sigma t)]$.

Тогда КСП единичного скачка есть предел КСП экспоненциального импульса при $\sigma \rightarrow 0$ и $V = 1$:

$$F(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{1}{j\omega},$$

т.е. АЧС единичного скачка (рис. 4.37) $F(\omega) = \frac{1}{\omega}$.

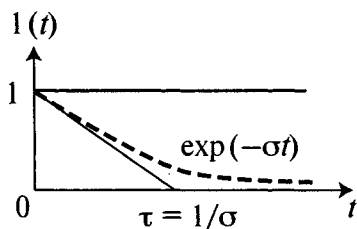


Рис. 4.36

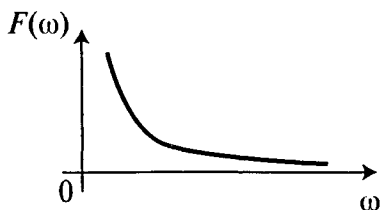


Рис. 4.37

4.6.3. Алгоритм спектрального метода анализа переходных процессов

По известным КПФ цепи $H(j\omega)$ и КСП воздействия $F_1(j\omega)$ может быть найдена КСП (спектр) отклика $F_2(j\omega) = F_1(j\omega) H(j\omega)$, который путем замены $j\omega$ на s преобразуем в изображение по Лапласу $F_2(s)$. Тогда по таблице преобразований Лапласа получим оригинал отклика на выходе $v_2(t)$.

Таким образом, алгоритм спектрального метода анализа переходных процессов при произвольном воздействии включает три пункта:

1. *Определение КСП отклика: $F_2(j\omega) = F_1(j\omega) H(j\omega)$.*
2. *Переход к ОПХ отклика $F_2(s)$ и приведение ее к табличной форме.*
3. *Определение оригинала $v_2(t)$ по таблице преобразований Лапласа.*

Например, при КСП воздействия типа «единичный скачок» $F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ получаем:

1) КСП (спектр) отклика

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega) H(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{j\omega}, \text{ т.е. } F_2(s) = \frac{H(s)}{s};$$

2) если $H(s) = \frac{1}{1+s\tau} = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$, то $F_2(s) = \frac{1/\tau}{s(s+1/\tau)}$;

3) по табл. 4.1 (строка 8) оригинал отклика

$$v_2(t) = 1 - \exp(-t/\tau) = h_1(t)$$

(переходная характеристика звена НЧ-1).

При КСП «взвешенного» скачка $F_1(j\omega) = \frac{V}{j\omega}$ КСП

(спектр) отклика равна $F_2(j\omega) = V \frac{H(j\omega)}{j\omega}$ и временная

функция отклика есть «взвешенная» (с весом V) переходная характеристика $v_2(t) = V h_1(t)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сущность законов коммутации в электрических цепях.
2. Классический метод анализа переходных процессов.
3. Характер процесса заряда и разряда емкости через резисторы.
4. Достоинство операторного метода анализа.
5. Учет ненулевых начальных условий для реактивных элементов цепи.
6. Операторный метод анализа переходных процессов.
7. Виды единичных воздействий и их взаимосвязь.
8. Временные характеристики билинов и их взаимосвязь.
9. Временные характеристики биквадров.
10. Особенности временных характеристик одиночных колебательных контуров.
11. Понятия ступенчатого воздействия и «взвешенного» отклика.
12. Формы интеграла Дюамеля.
13. Взаимосвязь частотных и временных характеристик цепи.
14. Особенности спектров одиночных сигналов.
15. Спектральный метод анализа переходных процессов.

Тема 5. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. Первичные параметры четырехполюсников

5.1.1. Виды и основные характеристики четырехполюсников

Четырехполюсник (ЧП) — это электрическая цепь, имеющая две пары полюсов (зажимов, точек подключения к другим цепям), причем в каждой из двух пар полюсов ток один и тот же. Условно ЧП изображают в виде прямоугольника с двумя парами полюсов (рис. 5.1).

Левую пару полюсов (1-1') называют *входом* ЧП, а правую (2-2') — *выходом*. К входу ЧП обычно подключают воздействие $v_{вз}$, а на выходе анализируют отклик $v_{от}$. В качестве воздействия и отклика используют напряжения U_1 и U_2 или токи I_1 и I_2 .

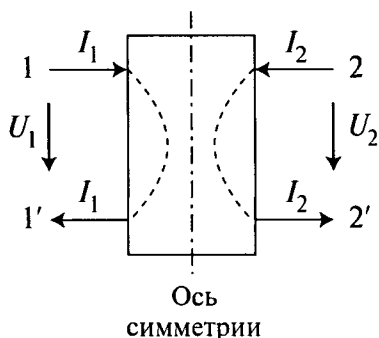


Рис. 5.1

Понятие «четыреполюсник» широко используется при анализе передаточных свойств и синтезе электрических фильтров, усилителей и других звеньев электрических цепей.

Как и любые электрические цепи, ЧП могут быть *линейными* и *нелинейными*, *активными* и *пассивными*. Кроме того, ЧП могут быть *симметричными*, для которых поворот вокруг оси симметрии (перемена местами входа

с выходом) не изменяет входных и выходных напряжений и токов, и *несимметричными* в противном случае.

Для описания свойств ЧП используют операторные $H(s)$, частотные $H(j\omega)$ и временные $h(t)$ характеристики (функции) как отношение отклика к воздействию:

$$H(s) = \frac{V_{\text{от}}(s)}{V_{\text{вз}}(s)}; \quad H(j\omega) = \frac{v_{\text{от}}(j\omega)}{v_{\text{вз}}(j\omega)}; \quad h(t) = \frac{v_{\text{от}}(t)}{v_{\text{вз}}(t)}.$$

Поскольку о внутренней структуре ЧП в общем случае ничего не известно, а известны (могут быть измерены) только входные (U_1, I_1) и выходные (U_2, I_2) параметры, то теория ЧП может быть построена на основе анализа комбинаций этих параметров.

Если полагать в качестве воздействия любую пару параметров, а в качестве отклика оставшуюся пару параметров, то получим шесть сочетаний из четырех по 2, т.е. шесть групп функциональных взаимосвязей, которые называют *системами первичных параметров* ЧП (табл. 5.1).

Таблица 5.1

$V_{\text{вз}}$	U_1, U_2	I_1, I_2	U_2, I_2'	U_1, I_1'	U_1, I_2	U_2, I_1
$V_{\text{от}}$	I_1, I_2	U_1, U_2	U_1, I_1	U_2, I_2	U_2, I_1	U_1, I_2
Первичные параметры	Y	Z	A	B	G	H

Примечание: $I_1' = -I_1$; $I_2' = -I_2$.

5.1.2. Системы первичных параметров четырехполюсников

В соответствии с методом наложения и с учетом систем первичных параметров ЧП (см. табл. 5.1) можно записать следующие шесть систем уравнений в операторной форме:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2; \\ I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [Y] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2; \\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [Z] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I'_2; \\ I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I'_2, \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [A] \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I'_2 \end{bmatrix}; \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} U_2 = B_{11}U_1 + B_{12}I'_1; \\ I_2 = B_{21}U_1 + B_{22}I'_1, \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [B] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ I'_1 \end{bmatrix}; \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}I_2; \\ U_2 = G_{21}U_1 + G_{22}I_2, \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [G] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2; \\ I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2, \end{cases} \text{ или } \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [H] \times \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Здесь $[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ — матрица Y -параметров. Ана-

логично для матриц Z -, A -, B -, G - и H -параметров.

Поскольку уравнения (5.1)–(5.6) могут быть представлены в матричной форме, то системы первичных параметров ЧП называют *матричными параметрами* ЧП.

Все системы первичных (матричных) параметров взаимосвязаны, т.е. от одной системы можно перейти к другой с помощью формул перехода, которые сведены в таблицы; например, в табл. 5.2 приведена взаимосвязь Y -, Z - и A -параметров.

В табл. 5.2 обозначены определители:

$$\begin{aligned} |\underline{Y}| &= \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}, & |\underline{Z}| &= \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}, \\ |\underline{A}| &= \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21}. \end{aligned}$$

Для симметричного ЧП выполняются равенства:

$$Y_{11} = Y_{22}, \quad Z_{11} = Z_{22}, \quad A_{11} = A_{22}. \quad (5.7)$$

Таблица 5.2

	<u>Y</u>	<u>Z</u>	<u>A</u>
<u>Y</u>	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{ \underline{Z} } & \frac{-\underline{Z}_{12}}{ \underline{Z} } \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{ \underline{Z} } & \frac{\underline{Z}_{11}}{ \underline{Z} } \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} & \frac{- \underline{A} }{\underline{A}_{12}} \\ -1 & \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}} \end{bmatrix}$
<u>Z</u>	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{ \underline{Y} } & \frac{-\underline{Y}_{12}}{ \underline{Y} } \\ \frac{\underline{Y}_{21}}{ \underline{Y} } & \frac{\underline{Y}_{11}}{ \underline{Y} } \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} & \frac{ \underline{A} }{\underline{A}_{21}} \\ 1 & \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \end{bmatrix}$
<u>A</u>	$\begin{bmatrix} \frac{-\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & \frac{-1}{\underline{Y}_{21}} \\ -\frac{ \underline{Y} }{\underline{Y}_{21}} & \frac{-\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{ \underline{Z} }{\underline{Z}_{21}} \\ 1 & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$

Рассмотрим физический смысл, например, матричных A -параметров, для чего воспользуемся опытом холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ) на одной из пар полюсов. Из (5.3) при ХХ на выходе ($I'_2 = 0$) получим

$$U_1 = A_{11}U_2; \quad I_1 = A_{21}U_2;$$

а при КЗ на выходе ($U_2 = 0$)

$$U_1 = A_{12}I'_2; \quad I_1 = A_{22}I'_2.$$

Следовательно:

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \quad (I'_2 = 0) \quad \text{— величина, обратная коэффициенту передачи по напряжению при ХХ на выходе;}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \quad (I'_2 = 0) \quad \text{— передаточная проводимость при ХХ на выходе;}$$

$A_{12} = \frac{U_1}{I_2'} (U_2 = 0)$ — передаточное сопротивление при КЗ на выходе;

$A_{22} = \frac{I_1}{I_2'} (U_2 = 0)$ — величина, обратная коэффициенту передачи по току при КЗ на выходе.

A -параметры ЧП используются при анализе и синтезе пассивных и активных электрических фильтров, так как они удобны при анализе каскадного соединения звеньев электрической цепи.

При анализе транзисторных схем удобна система H -параметров.

Пример. Рассмотрим порядок определения A -параметров электрической схемы, приведенной на рис. 5.2.

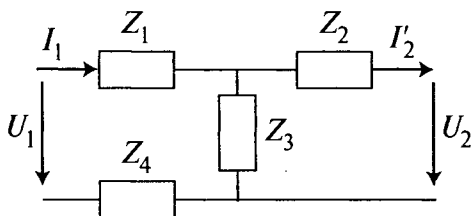


Рис. 5.2

Согласно определению A -параметров получим:

а) при $I_2' = 0$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_1 \frac{Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4}} = \frac{Z_1 + Z_3 + Z_4}{Z_3};$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_1 Z_3} = \frac{1}{Z_3};$$

б) при $U_2 = 0$

$$A_{12} = \frac{U_1}{I_2'} = \frac{U_1}{U_1 \frac{Z_{23}}{(Z_1 + Z_{23} + Z_4) Z_2}} = \frac{(Z_1 + Z_{23} + Z_4) Z_2}{Z_{23}};$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{I'_2} = \frac{I_1}{I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_3}.$$

Здесь $Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$.

5.1.3. Составные четырехполюсники и их матричные параметры

Задачу анализа сложных цепей можно упростить путем объединения нескольких ЧП в один «составной» ЧП. При этом два ЧП объединяются (соединяются) пятью способами:

1. Каскадное (последовательное, цепочное) соединение (рис. 5.3).

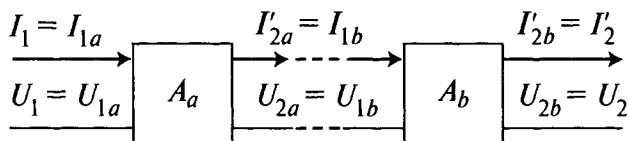


Рис. 5.3

При использовании матричных A -параметров для ЧП a и b получим

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = [A_a] \times \begin{bmatrix} U_{2a} \\ I'_{2a} \end{bmatrix} = [A_a] \times \begin{bmatrix} U_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = [A_a] \times [A_b] \times \begin{bmatrix} U_2 \\ I'_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица A -параметров составного ЧП при каскадном соединении ЧП a и b

$$[A] = [A_a] \times [A_b]. \quad (5.8)$$

Таким образом, при каскадном соединении ЧП их матричные A -параметры перемножаются. Поскольку произведение (5.8) является матричным, то порядок следования сомножителей нельзя нарушать.

Аналогично и для матрицы B -параметров:

$$[B] = [B_b] \times [B_a]. \quad (5.9)$$

2. Параллельное соединение входов и выходов (рис. 5.4).

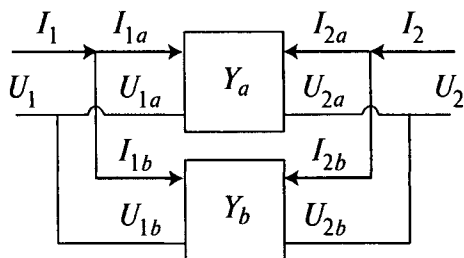


Рис. 5.4

Из рис. 5.4 следует:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} + I_{1b}; & I_2 &= I_{2a} + I_{2b}; \\ U_1 &= U_{1a} = U_{1b}; & U_2 &= U_{2a} = U_{2b}. \end{aligned}$$

Тогда $[Y] = [Y_a] + [Y_b]$. (5.10)

Итак, при параллельном соединении входов и выходов ЧП их матричные Y -параметры складываются.

3. Последовательное соединение входов и выходов (рис. 5.5).

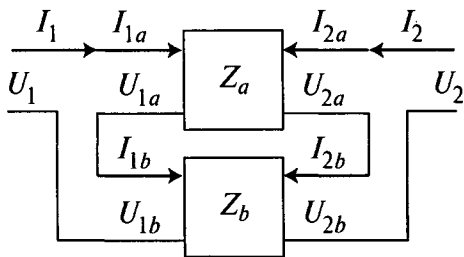


Рис. 5.5

Из рис. 5.5 следует:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} = I_{1b}; & I_2 &= I_{2a} = I_{2b}; \\ U_1 &= U_{1a} + U_{1b}; & U_2 &= U_{2a} + U_{2b}. \end{aligned}$$

Тогда $[Z] = [Z_a] + [Z_b]$. (5.11)

Таким образом, при последовательном соединении входов и выходов ЧП их матричные Z -параметры складываются.

4. Параллельное соединение входов и последовательное соединение выходов (рис. 5.6).

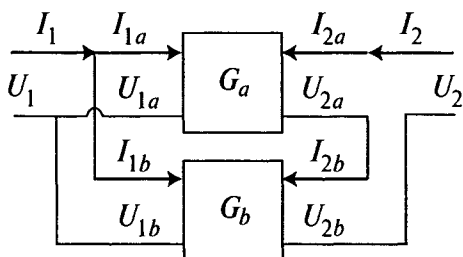


Рис. 5.6

Из рис. 5.6 следует:

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} = I_{2b};$$

$$U_1 = U_{1a} = U_{1b}; \quad U_2 = U_{2a} + U_{2b}.$$

Тогда $[G] = [G_a] + [G_b].$ (5.12)

Таким образом, при параллельном соединении входов и последовательном соединении выходов ЧП их матричные G -параметры складываются.

5. Последовательное соединение входов и параллельное соединение выходов (рис. 5.7).

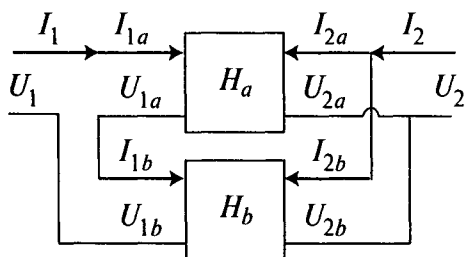


Рис. 5.7

Из рис. 5.7 следует:

$$I_1 = I_{1a} = I_{1b}; \quad I_2 = I_{2a} + I_{2b};$$

$$U_1 = U_{1a} + U_{1b}; \quad U_2 = U_{2a} = U_{2b}.$$

Тогда $[H] = [H_a] + [H_b].$ (5.13)

Таким образом, при последовательном соединении входов и параллельном соединении выходов ЧП их матричные H -параметры складываются.

5.1.4. Схемы замещения четырехполюсников и их А-параметры

Первичные (матричные) параметры ЧП определяются инвариантно к их внутренней структуре. Однако при реализации конкретных видов ЧП необходимо задаваться их структурой (топологией), при этом обычно их представляют в виде двух различных Г-образных полузвеньев, Т-, П-образных и мостовых звеньев.

Каскадное соединение двух разных Г-образных полузвеньев образует Т-образное (рис. 5.8, а) или П-образное звено (рис. 5.8, б).

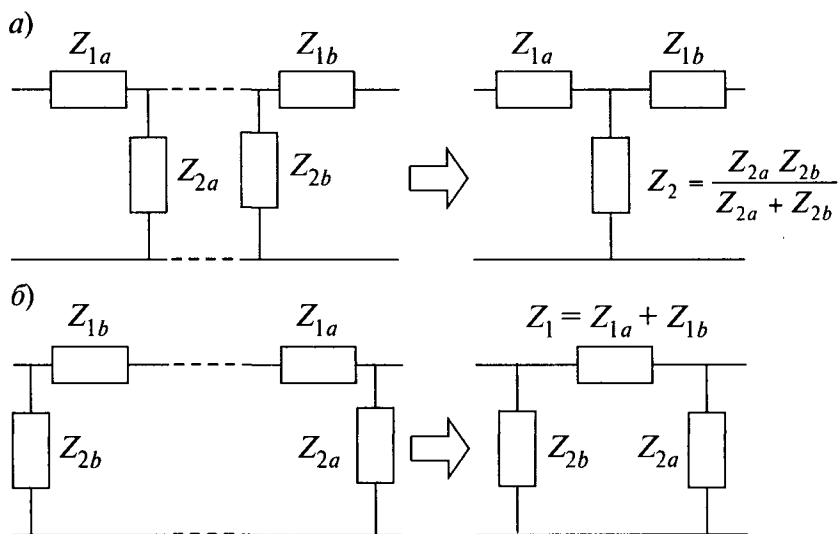


Рис. 5.8

Найдем А-параметры этих схем замещения, используя их физические определения (см. 5.1.2) и выражение (5.8).

Для полузвена вида а (рис. 5.9):

а) при $I_2' = 0$

$$A_{11a} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_1 \frac{Z_{2a}}{Z_{1a} + Z_{2a}}} = \frac{Z_{1a} + Z_{2a}}{Z_{2a}};$$

$$A_{21a} = \frac{I_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_1 Z_{2a}} = \frac{1}{Z_{2a}} \text{ (Ом);}$$

б) при $U_2 = 0$

$$A_{12a} = \frac{U_1}{I'_2} = \frac{U_1}{U_1/Z_{1a}} = Z_{1a} \text{ (Ом);}$$

$$A_{22a} = \frac{I_1}{I'_2} = \frac{I_1}{I_1} = 1,$$

следовательно,

$$[A_a] = \begin{bmatrix} A_{11a} & A_{12a} \\ A_{21a} & A_{22a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{1a} + Z_{2a}}{Z_{2a}} & Z_{1a} \\ \frac{1}{Z_{2a}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Для полувзена вида *b* (рис. 5.10) аналогично получим (убедиться самостоятельно)

$$[A_b] = \begin{bmatrix} A_{11b} & A_{12b} \\ A_{21b} & A_{22b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{1b} \\ \frac{1}{Z_{2b}} & \frac{Z_{1b} + Z_{2b}}{Z_{2b}} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

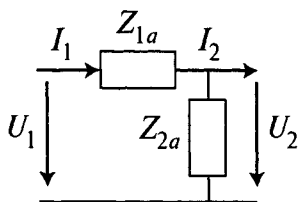


Рис. 5.9

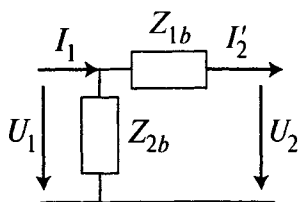


Рис. 5.10

Тогда для Т-образного звена матрица $[A] = [A_a] \times [A_b]$, а для П-образного звена $[A] = [A_b] \times [A_a]$.

Схемы мостового четырехполюсника приведены на рис. 5.11.

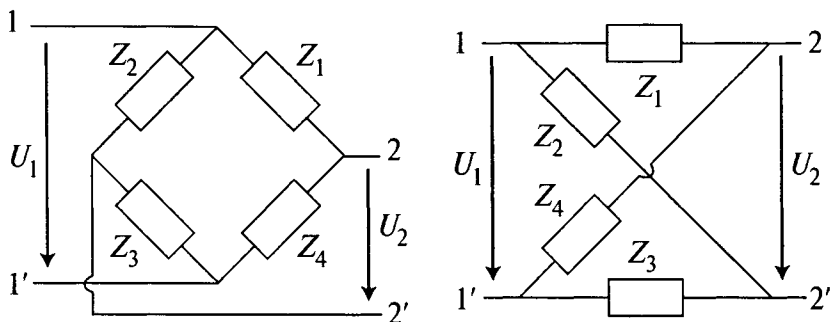


Рис. 5.11

Для симметричного мостового ЧП (при $Z_1 = Z_3$ и $Z_2 = Z_4$)

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{12} = \frac{2Z_1Z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}. \quad (5.16)$$

5.2. Вторичные (характеристические) параметры четырехполюсников

Характеристические параметры четырехполюсника определяют, чтобы обеспечить его согласование с источником и нагрузкой. Поскольку они являются совокупностью первичных параметров, например A -параметров, т.е. определяют свойства ЧП, то их называют также *вторичными параметрами*.

5.2.1. Характеристическое сопротивление четырехполюсников

Рассмотрим входное ($Z_{вх}$) сопротивление четырехполюсника, нагруженного на сопротивление нагрузки Z_2 (рис. 5.12, а), и выходное ($Z_{вых}$) сопротивление четырехполюсника, подключенного к источнику с внутренним сопротивлением Z_1 (рис. 5.12, б).

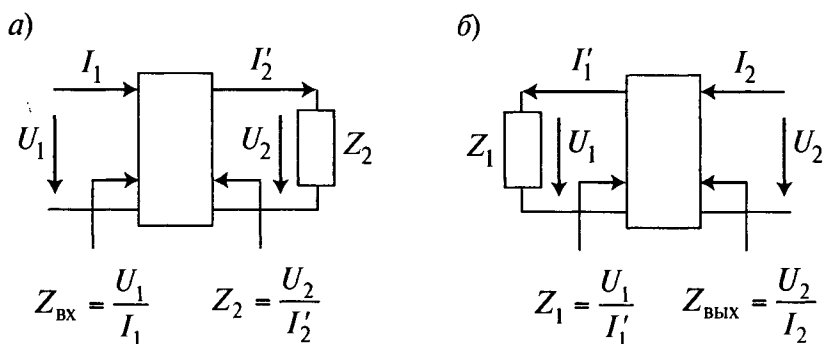


Рис. 5.12

Из (5.3), разделив первое уравнение на второе, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11} U_2 + A_{12} I_2'}{A_{21} U_2 + A_{22} I_2'} = \frac{A_{11} \frac{U_2}{I_2'} + A_{12}}{A_{21} \frac{U_2}{I_2'} + A_{22}} = \frac{A_{11} Z_2 + A_{12}}{A_{21} Z_2 + A_{22}}.$$

Из (5.4), разделив первое уравнение на второе, получим

$$Z_{\text{вых}} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{B_{11} U_1 + B_{12} I_1'}{B_{21} U_1 + B_{22} I_1'} = \frac{B_{11} \frac{U_1}{I_1'} + B_{12}}{B_{21} \frac{U_1}{I_1'} + B_{22}} = \frac{B_{11} Z_1 + B_{12}}{B_{21} Z_1 + B_{22}}.$$

Учитывая взаимосвязь A - и B -параметров

$$B_{11} = \frac{A_{22}}{|A|}; \quad B_{12} = \frac{A_{12}}{|A|}; \quad B_{21} = \frac{A_{21}}{|A|}; \quad B_{22} = \frac{A_{11}}{|A|},$$

где $|A|$ — определитель матрицы A -параметров, получим (убедиться самостоятельно):

$$Z_{\text{вых}} = \frac{A_{22} Z_1 + A_{12}}{A_{21} Z_1 + A_{11}}.$$

Найдем такие значения $Z_{\text{вх}}$ и $Z_{\text{вых}}$, которые не зависят от Z_1 и Z_2 , а зависят только от A -параметров ЧП, т.е. являются характеристическими.

Характеристическим сопротивлением называют такое входное сопротивление Z_{c1} , которое имеет место при согласовании ЧП на выходе, т.е. при $Z_2 = Z_{c2}$, или такое выходное сопротивление Z_{c2} , которое имеет место при согласовании на входе, т.е. при $Z_1 = Z_{c1}$:

$$Z_{c1} = Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11} Z_{c2} + A_{12}}{A_{21} Z_{c2} + A_{22}};$$

$$Z_{c2} = Z_{\text{вых}} = \frac{A_{22} Z_{c1} + A_{12}}{A_{21} Z_{c1} + A_{11}}.$$

Решая эти уравнения совместно, получим (убедиться самостоятельно):

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{21} A_{22}}}; \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}}. \quad (5.17)$$

Поскольку Z_{c1} и Z_{c2} представляют собой совокупность первичных параметров, то они являются *вторичными параметрами* ЧП.

Для симметричных ЧП, т.е. при $A_{11} = A_{22}$, из (5.17) получим

$$Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}. \quad (5.18)$$

5.2.2. Характеристическая постоянная передачи четырехполюсников

Рассмотрим условия для прохождения воздействия (сигнала) от входа к выходу в согласованном по выходу ЧП, т.е. при $Z_2 = Z_{c2}$ (рис. 5.13).

Из (5.3) получим:

$$\frac{U_1}{U_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_{c2}}; \quad \frac{I_1}{I'_2} = A_{21} Z_{c2} + A_{22}.$$

После подстановки в эти уравнения выражений (5.17) получим (убедиться самостоятельно):

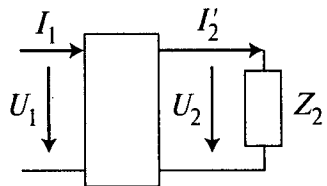


Рис. 5.13

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= A_{11} + A_{12} \sqrt{\frac{A_{21} A_{11}}{A_{22} A_{12}}} = \\ &= \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \left(\sqrt{A_{11} A_{22}} + \sqrt{A_{12} A_{21}} \right); \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I'_2} &= A_{21} \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}} + A_{22} = \\ &= \sqrt{\frac{A_{22}}{A_{11}}} \left(\sqrt{A_{11} A_{22}} + \sqrt{A_{12} A_{21}} \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Перейдем от операторных величин к комплексным путем замены s на $j\omega$ и обозначим $\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}$ через $\exp(\underline{\Gamma})$:

$$\exp(\underline{\Gamma}) = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \text{ch } \underline{\Gamma} + \text{sh } \underline{\Gamma}; \quad (5.21)$$

$$\text{ch } \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}}; \quad \text{sh } \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}, \quad (5.22)$$

где $\underline{\Gamma} = A + jB = \ln \left(\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right)$ — некоторая комплексная величина, физический смысл которой будет рассмотрен ниже. Поскольку эта величина есть совокупность первичных параметров, то она также является *вторичным параметром* ЧП.

Тогда выражения (5.19) и (5.20) примут вид

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} \exp(\underline{\Gamma}); \quad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} \exp(\underline{\Gamma}). \quad (5.23)$$

Для симметричных ЧП, т.е. при $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}'_2} = \exp(\underline{\Gamma}_c); \quad \text{ch } \underline{\Gamma}_c = \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}. \quad (5.24)$$

Рассмотрим теперь физический смысл комплексной величины \underline{G}_c . Согласно (5.24) и с учетом того, что $\underline{G}_c = A_c + jB_c$, получим

$$\begin{aligned} \exp(\underline{G}_c) &= \exp(A_c) \exp(jB_c) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{H_c(j\omega)} = \\ &= \frac{1}{H_c(\omega)} \exp[-j\varphi_c(\omega)], \end{aligned}$$

где $H_c(\omega)$ и $\varphi_c(\omega)$ — АЧХ и ФЧХ симметричного четырех-полюсника соответственно.

$$\text{Тогда } \exp(A_c) = \frac{1}{H_c(\omega)};$$

$$B_c = -\varphi_c(\omega) = \varphi_1 - \varphi_2;$$

$$A_c = \ln \frac{1}{H_c(\omega)} = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2'}, \quad (5.25)$$

где φ_1 и φ_2 — фазы напряжения (тока) на входе и выходе ЧП соответственно.

Таким образом, величина A_c характеризует *изменение амплитуд* напряжения (тока) при прохождении от входа к выходу ЧП и называется *собственным ослаблением* симметричного ЧП, измеряется в неперах (Нп) при использовании натурального логарифма (5.25) и в децибелах (дБ) при использовании десятичного логарифма, т.е.

$$A_c = 20 \lg \frac{1}{H_c(\omega)} = -20 \lg H_c(\omega), \quad (5.25a)$$

причем 1 Нп = 8,68 дБ; 1 дБ = 0,115 Нп.

Величина B_c характеризует *изменение начальной фазы* напряжения (тока) при прохождении от входа к выходу ЧП и называется *коэффициентом фазы (фазовой постоянной)* симметричного ЧП, измеряется в радианах или градусах.

Тогда комплексная величина $\underline{\Gamma}_c = A_c + jB_c$ характеризует *передачу комплексных амплитуд* напряжения (тока) от входа к выходу ЧП и называется *характеристической постоянной передачи* симметричного ЧП.

При передаче полной мощности от входа (S_1) к выходу (S_2) через симметричный ЧП отношение полных мощностей

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{[H_c(\omega)]^2} = \exp(2A_c).$$

Тогда

$$A_c = 0,5 \ln \frac{S_1}{S_2} \text{ (Нп)}; \quad A_c = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} \text{ (дБ)}. \quad (5.26)$$

Покажем, что при каскадном соединении n симметричных ЧП (рис. 5.14), согласованных с нагрузкой и между собой по входам и выходам, общая характеристическая постоянная передачи равна сумме характеристических постоянных передачи каждого ЧП.

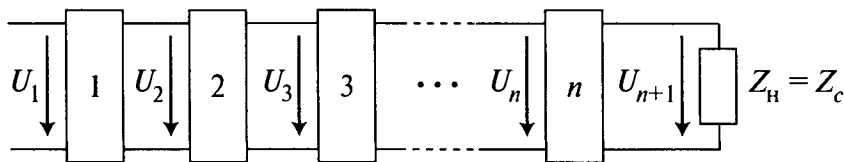


Рис. 5.14

Действительно, при каскадном соединении получим

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_c &= A_c + jB_c = \ln \frac{U_1}{U_{n+1}} = \\ &= \ln \frac{U_1}{U_2} + \ln \frac{U_2}{U_3} + \ln \frac{U_3}{U_4} + \dots + \ln \frac{U_n}{U_{n+1}} = \\ &= \underline{\Gamma}_{c1} + \underline{\Gamma}_{c2} + \dots + \underline{\Gamma}_{cn} = (A_{c1} + A_{c2} + \dots + A_{cn}) + \\ &+ j(B_{c1} + B_{c2} + \dots + B_{cn}). \end{aligned}$$

Таким образом, при каскадном соединении симметричных согласованных ЧП их *собственные ослабления и фазовые постоянные складываются*.

Согласно (5.25)

$$\begin{aligned} A_{c1} + A_{c2} + \dots + A_{cn} &= \ln \frac{U_1}{U_2} + \ln \frac{U_2}{U_3} + \dots + \ln \frac{U_n}{U_{n+1}} = \\ &= \ln \frac{U_1}{U_{n+1}} = \ln \frac{1}{H(\omega)}. \end{aligned}$$

После потенцирования получим

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \dots H_n(\omega). \quad (5.27)$$

Следовательно, при каскадном соединении симметричных ЧП их *АЧХ перемножаются*.

С учетом (5.25) получим

$$\varphi_c(\omega) = -B_c = -\sum_{i=1}^n B_{ci} = -\sum_{i=1}^n [-\varphi_{ci}(\omega)] = \sum_{i=1}^n [\varphi_{ci}(\omega)]. \quad (5.28)$$

Следовательно, при каскадном соединении симметричных ЧП их *ФЧХ складываются*.

5.3. Рабочие параметры четырехполюсников

5.3.1. Передаточные функции четырехполюсников

На практике четырехполюсники нагружаются как по входу произвольным *внутренним сопротивлением источника воздействия*, так и по выходу произвольным (обычно резистивным) *сопротивлением нагрузки*. Кроме того, добиться равенства комплексных сопротивлений (источника, нагрузки и характеристических) на всех частотах рабочего диапазона практически не удастся. Поэтому характеристические параметры, полученные для согласованных четырехполюсников, находят ограниченное

применение, обычно для симметричных четырехполюсников, т.е. при условии $Z_{c1} = Z_{c2} = Z_c = R_0$.

Рассмотрим передаточные функции четырехполюсника при подключении произвольных сопротивлений источника Z_1 и нагрузки Z_2 , т.е. в режиме двусторонней нагрузки (рис. 5.15).

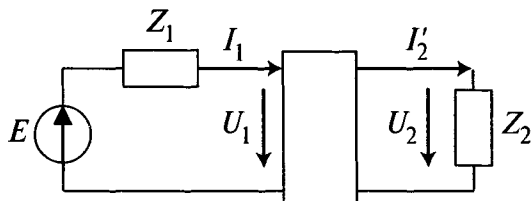


Рис. 5.15

В этой схеме $\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1$; $\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}'_2$.

Комплексная передаточная функция такой цепи

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}'_2}{\underline{U}_1 + \underline{Z}_1 \underline{I}_1} = \\
 &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}'_2}{\underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_2 + \left(\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}'_2 \right) \underline{Z}_1} = \\
 &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21} \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22} \underline{Z}_1}. \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

Полученное выражение имеет смысл *комплексного коэффициента передачи по напряжению*, модуль (АЧХ) которого принято нормировать относительно максимально достижимого выходного напряжения U_{2m} .

На практике обычно используют резистивные сопротивления источника R_1 и нагрузки R_2 . Максимальная мощность в резистивной нагрузке при непосредственном подключении источника к согласованной нагрузке равна

на $P_{2m} = \frac{E^2}{4R_1}$. Максимальная мощность в резистивной

нагрузке четырехполюсника не может превышать величины $\frac{U_{2m}^2}{R_2}$.

Из равенства этих мощностей для пассивных четырехполюсников получим величину нормирующего напряжения $U_{2m} = 0,5 E \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$.

Тогда **рабочая амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)** четырехполюсника в режиме двусторонней нагрузки будет

$$H_p(\omega) = \frac{U_2}{U_{2m}} = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \quad (5.30)$$

Для пассивных четырехполюсников всегда $H_p(\omega) \leq 1$.

Величина $K = \ln [H_p(\omega)]$ определяет *рабочее усиление* четырехполюсника в непереходах, а обратная по знаку величина — *рабочее ослабление* также в непереходах:

$$\begin{aligned} A_p(\omega) &= -\ln [H_p(\omega)] = \ln \frac{1}{H_p(\omega)} = \ln \frac{E}{2U_2} + 0,5 \ln \frac{R_2}{R_1} = \\ &= \ln \frac{E}{2U_2} - 0,5 \ln \frac{R_1}{R_2}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Рабочую комплексную передаточную функцию получим из (5.30):

$$H_p(j\omega) = H_p(\omega) \exp [jB_p(\omega)] = \frac{2U_2}{E} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

После подстановки отношения $\frac{U_2}{E}$ из (5.29) при $Z_1 = R_1$ и $Z_2 = R_2$ имеем (убедиться самостоятельно)

$$H_p(j\omega) = 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{R_2}{\underline{A}_{11}R_2 + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}R_1R_2 + \underline{A}_{22}R_1} =$$

$$= \frac{2 \sqrt{R_1R_2}}{\underline{A}_{11}R_2 + \underline{A}_{12} + \underline{A}_{21}R_1R_2 + \underline{A}_{22}R_1}.$$

Это выражение содержит информацию о *рабочем усилении (ослаблении) и рабочей фазе* $V_p(\omega)$.

Рабочее ослабление A_p по аналогии с (5.25) является вещественной частью *комплексной рабочей постоянной передачи*: $\underline{\Gamma}_p = A_p + jB_p$, где B_p — рабочая фазовая постоянная.

Рабочее ослабление (5.31) включает действующие значения E и U_2 , которые могут быть измерены экспериментально, поэтому формула (5.31) часто используется на практике для измерения нормированного рабочего ослабления четырехполюсников.

При теоретических расчетах используют другое представление рабочего ослабления, более полно учитывающее условия согласования четырехполюсника с источником и нагрузкой.

5.3.2. Вносимое и рабочее ослабления четырехполюсника

Рассмотрим условия передачи полной мощности S от источника с ЭДС E и с внутренним сопротивлением Z_1 в нагрузку Z_2 через четырехполюсник с известными A -параметрами (см. рис. 5.15), причем $Z_1 \neq Z_2$.

При непосредственном подключении источника к нагрузке полная мощность

$$S_{2m} = \left| \frac{\underline{E}^2 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2} \right|. \quad (5.32)$$

Полная мощность, поступающая в нагрузку от источника через ЧП,

$$S_2 = \left| \left(\underline{I}'_2 \right)^2 \underline{Z}_2 \right|. \quad (5.33)$$

Назовем *вносимым ослаблением* величину

$$A_{\text{вн}} = 0,5 \ln \frac{S_{2m}}{S_2}.$$

Эта величина характеризует влияние ЧП на передачу полной мощности от источника в нагрузку, т.е. вносимое ослабление определяет *изменение полной мощности* в нагрузке после включения (внесения) ЧП между источником и нагрузкой.

После подстановки (5.32) и (5.33) получим

$$A_{\text{вн}} = \ln \left| \frac{\underline{E}}{\underline{I}'_2 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \right|.$$

Выразим отношение $\frac{\underline{E}}{\underline{I}'_2}$ через сопротивления источника \underline{Z}_1 , нагрузки \underline{Z}_2 и характеристические параметры четырехполюсника.

При известных A -параметрах по второму закону Кирхгофа

$$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{I}_1 \underline{Z}_1 = \left(\underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_2 \right) + \left(\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}'_2 \right) \underline{Z}_1.$$

Разделив на \underline{I}'_2 , получим

$$\frac{\underline{E}}{\underline{I}'_2} = \left(\underline{A}_{11} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12} \right) + \left(\underline{A}_{21} \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22} \right) \underline{Z}_1.$$

Выразим комплексные A -параметры через комплексные характеристические параметры, используя соотношения (5.17) и (5.22).

Например, параметры \underline{A}_{11} и \underline{A}_{22} найдем, решая совместно выражения $\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}$ и $\text{ch } \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}}$:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} \text{ch } \underline{\Gamma} \quad \text{и} \quad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}} \text{ch } \underline{\Gamma}.$$

Аналогично из выражений $\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$ и $\text{sh } \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}$ получим

$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}} \text{sh } \underline{\Gamma} \quad \text{и} \quad \underline{A}_{21} = \frac{\text{sh } \underline{\Gamma}}{\sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}}}.$$

С учетом того, что $\text{ch } \underline{\Gamma} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}}}{2}$; $\text{sh } \underline{\Gamma} = \frac{e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}}}{2}$, после подстановки A -параметров получим (убедиться самостоятельно):

$$\begin{aligned} \frac{\underline{E}}{\underline{I}'_2} = & \left[\underline{Z}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} + \sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}}} + \underline{Z}_1 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}} \right] \frac{e^{\underline{\Gamma}}}{2} + \\ & + \left[\underline{Z}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_{c2}}} - \sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}} - \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\sqrt{\underline{Z}_{c1} \underline{Z}_{c2}}} + \underline{Z}_1 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_{c1}}} \right] \frac{e^{-\underline{\Gamma}}}{2}. \end{aligned}$$

Для удобства анализа введем **комплексные коэффициенты отражения** \underline{n}_1 (на входе) и \underline{n}_2 (на выходе):

$$\underline{n}_1 = \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_{c1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{c1}}; \quad \underline{n}_2 = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_{c2}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{c2}}. \quad (5.34)$$

После всех подстановок окончательное выражение для вносимого ослабления примет вид

$$\begin{aligned}
A_{\text{вн}} &= A_c + \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{c1}}{2\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{c1}}} \right| + \ln \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{c2}}{2\sqrt{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{c2}}} \right| + \\
&+ \ln \left| 1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 \exp(-2\underline{\Gamma}) \right| - \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}} \right| = \\
&= A_c + A_1 + A_2 + A_3 - A_4.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Таким образом, выражение (5.35) включает собственное ослабление A_c , дополнительные ослабления из-за несогласованности на входе и выходе четырехполюсника (слагаемые A_1 , A_2 и A_3) и отрицательное ослабление A_4 из-за несогласованности источника с нагрузкой, которое от параметров четырехполюсника не зависит, и поэтому четырехполюсник его не «вносит» и оно вычитается из $A_{\text{вн}}$.

Рабочим ослаблением A_p является наибольшее вносимое ослабление при передаче полной мощности в нагрузку при согласовании источника и нагрузки ($Z_1 = Z_2$; $A_4 = 0$), т.е. из (5.35) следует:

$$A_p = A_c + A_1 + A_2 + A_3, \tag{5.36}$$

где $A_1 = \ln \left| \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{c1}}{2\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_{c1}}} \right|$ — ослабление из-за несогласованности ЧП с источником;

$A_2 = \ln \left| \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{c2}}{2\sqrt{\underline{Z}_2 \underline{Z}_{c2}}} \right|$ — ослабление из-за его несогласованности с нагрузкой;

$A_3 = \ln \left| 1 - \underline{n}_1 \underline{n}_2 \exp(-2\underline{\Gamma}) \right|$ — ослабление из-за многократного отражения энергии от входных и выходных зажимов четырехполюсника.

При согласовании ЧП с источником ($Z_1 = Z_{c1}$)

$$A_1 = A_3 = 0; \quad A_p = A_c + A_2.$$

При согласовании ЧП с нагрузкой ($Z_2 = Z_{c2}$)

$$A_2 = A_3 = 0; \quad A_p = A_c + A_1.$$

При согласовании ЧП с источником и нагрузкой ($Z_1 = Z_{c1}$ и $Z_2 = Z_{c2}$)

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_p = A_c,$$

т.е. рабочее и собственное ослабления совпадают.

При полном согласовании ($Z_1 = Z_{c1} = Z_{c2} = Z_2$)

$$A_p = A_c = A_{\text{вн}},$$

т.е. рабочее, собственное и вносимое ослабления совпадают.

5.4. Длинные линии при гармоническом воздействии

5.4.1. Виды и первичные параметры длинных линий

До сих пор рассматривались электрические цепи с параметрами, сосредоточенными (см. введение) в пределах соответствующих идеализированных элементов (R, L, C), соединенных идеальными проводниками. При этом физические размеры (длина, высота, ширина) цепей были значительно меньше длины волны воздействий, что обеспечивало одинаковое значение тока (напряжения) на элементах последовательной (параллельной) цепи.

Рассмотрим теперь особенности цепей с распределенными параметрами, для которых длина волны воздействия соизмерима с физическими размерами цепи, что приводит к различным значениям тока (напряжения) на последовательно (параллельно) включенных элементах цепи.

При этом параметры (R, L, C) уже нельзя сосредоточить в пределах идеализированных элементов, так как они как бы «распределены» вдоль пространственных координат x, y, z . Поэтому теория ЭЦ, основанная на

законах Ома и Кирхгофа, для этих цепей непосредственно не пригодна. Чтобы обеспечить возможность ее использования, необходимо рассмотреть *бесконечно малый участок* такой цепи, в котором бесконечно малые параметры сосредоточены в пределах бесконечно малых идеализированных элементов.

Частным случаем цепей с распределенными параметрами являются *длинные линии* (ДЛ), в которых параметры (R , L , C) распределены вдоль их длины l , т.е. являются функцией одной пространственной координаты x . К длинным линиям относятся кабельные и воздушные линии связи, линии электропередачи, фидерные линии, антенны, резонаторы и т.п.

При этом различают следующие **виды длинных линий**:

- *симметричные* (рис. 5.16, а);
- *несимметричные (коаксиальные)* (рис. 5.16, б).

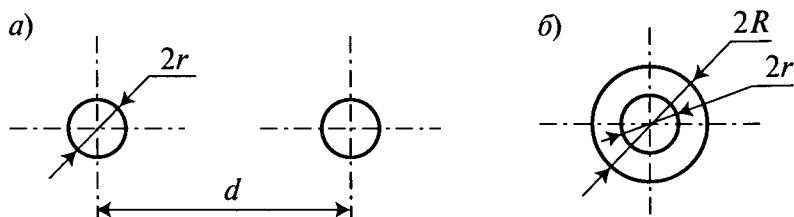


Рис. 5.16

Поскольку параметры длинной линии распределены вдоль ее длины, т.е. вдоль пространственной координаты x , то любой бесконечно малый участок dx обладает бесконечно малыми (элементарными) идеализированными параметрами: dR , dL , dC , dG .

Отношение элементарных параметров к длине dx называют *первичными (погонными) параметрами* длинной линии:

$$\frac{dR}{dx} = R_{\text{п}} \text{ — погонное сопротивление проводов ДЛ;}$$

$$\frac{dL}{dx} = L_{\text{п}} \text{ — погонная индуктивность проводов ДЛ;}$$

$\frac{dC}{dx} = C_{\text{п}}$ — погонная емкость между проводами ДЛ;

$\frac{dG}{dx} = G_{\text{п}}$ — погонная проводимость изоляции между проводами ДЛ.

Таким образом, в ДЛ используются четыре первичных параметра. Если погонные параметры $R_{\text{п}}$, $L_{\text{п}}$, $C_{\text{п}}$ и $G_{\text{п}}$ от координаты x не зависят, то ДЛ называют *однородной*.

5.4.2. Вторичные (характеристические) параметры длинных линий

Рассмотрим схему замещения бесконечно малого участка ДЛ, для которого параметры сосредоточены в пределах идеализированных элементов, т.е. возможно использование законов Ома и Кирхгофа (рис. 5.17).

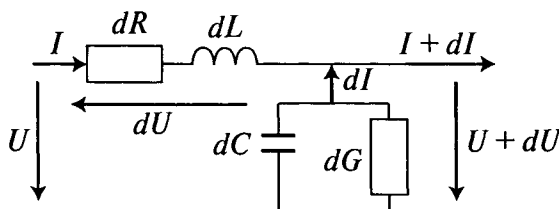


Рис. 5.17

Пусть к этому участку приложено гармоническое напряжение \underline{U} . Необходимо установить взаимосвязь параметров этого участка.

По закону Ома из этой схемы следует:

$$d\underline{U} = -\underline{I}(dR + j\omega dL) = -\underline{I}(R_{\text{п}} + j\omega L_{\text{п}})dx = -\underline{I}Z_{\text{п}} dx;$$

$$\begin{aligned} d\underline{I} &= -(\underline{U} + d\underline{U})(dG + j\omega dC) = -(\underline{U} + d\underline{U})(G_{\text{п}} + j\omega C_{\text{п}})dx = \\ &= -(\underline{U} + d\underline{U})Y_{\text{п}} dx = -\underline{U}Y_{\text{п}} dx - d\underline{U}Y_{\text{п}} dx \approx -\underline{U}Y_{\text{п}} dx. \end{aligned}$$

Вторым слагаемым пренебрегаем как бесконечно малой величиной второго порядка. Тогда

$$\frac{-d\underline{U}}{dx} = \underline{I} \underline{Z}_n; \quad \frac{-d\underline{I}}{dx} = \underline{U} \underline{Y}_n. \quad (5.37)$$

Выражения (5.37) называют *телеграфными уравнениями ДЛ*.

Дифференцируя первое уравнение (5.37) и подставляя в него второе уравнение, получаем уравнение *Гельмгольца*:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{U} = 0, \quad (5.38)$$

где $\gamma^2 = \underline{Z}_n \underline{Y}_n$, т.е.

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_n \underline{Y}_n} = \sqrt{(R_n + j\omega L_n)(G_n + j\omega C_n)} = \alpha + j\beta. \quad (5.39)$$

Найдем решение дифференциального уравнения (5.38) классическим методом, согласно которому $\underline{U}(x) = \underline{U}_y + \underline{U}_{св}$.

Поскольку $\underline{U}_y = 0$, то

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{св} = \underline{A}_1 \exp(\underline{s}_1 x) + \underline{A}_2 \exp(\underline{s}_2 x),$$

где $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ — коэффициенты, определяемые из граничных условий: $x = 0$ (начало ДЛ) или $x = l$ (конец ДЛ), а $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ — корни характеристического уравнения $\underline{s}^2 - \gamma^2 = 0$, т.е. $\underline{s}_1 = -\underline{\gamma}; \quad \underline{s}_2 = \underline{\gamma}$.

Тогда $\underline{U} = \underline{U}(x) = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma} x) + \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma} x)$.

Продифференцируем по x и сравним с (5.37):

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = -\underline{A}_1 \underline{\gamma} \exp(-\underline{\gamma} x) + \underline{A}_2 \underline{\gamma} \exp(\underline{\gamma} x) = -\underline{I} \underline{Z}_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}(x) = \underline{A}_1 \underline{\gamma} \exp(-\underline{\gamma} x) \frac{1}{\underline{Z}_n} - \underline{A}_2 \underline{\gamma} \exp(\underline{\gamma} x) \frac{1}{\underline{Z}_n} = \\ &= \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma} x) \frac{1}{\underline{Z}_B} - \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma} x) \frac{1}{\underline{Z}_B}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_B &= \frac{\underline{Z}_n}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{Z}_n}{\sqrt{\underline{Z}_n \underline{Y}_n}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_n}{\underline{Y}_n}} = \\ &= \sqrt{\frac{R_n + j\omega L_n}{G_n + j\omega C_n}} = \rho + jX_B. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Окончательно:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}x) + \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}x) = \underline{U}_n + \underline{U}_o; \\ \underline{I} = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}x) \frac{1}{\underline{Z}_B} - \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}x) \frac{1}{\underline{Z}_B} = \underline{I}_n + \underline{I}_o, \end{cases} \quad (5.41)$$

где $\underline{U}_n = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}x)$ — падающая волна напряжения;

$\underline{I}_n = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}x) \frac{1}{\underline{Z}_B}$ — падающая волна тока;

$\underline{U}_o = \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}x)$ — отраженная от конца ДЛ волна напряжения;

$\underline{I}_o = -\underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}x) \frac{1}{\underline{Z}_B}$ — отраженная от конца ДЛ волна тока.

Рассмотрим физический смысл $\underline{\gamma}$ и \underline{Z}_B , которые называют *вторичными (характеристическими) параметрами* ДЛ, поскольку они являются совокупностью первичных параметров [см. (5.39) и (5.40)]. Отношение

$$\frac{\underline{U}_n(x)}{\underline{U}_n(x+1)} = \exp(\underline{\gamma}) = \exp(\alpha) \exp(j\beta). \quad (5.42)$$

Здесь α — показатель *изменения амплитуды* падающего (отраженного) напряжения (тока) на единице длины ДЛ, который называют *коэффициентом затухания (ослабления)* ДЛ и измеряют в неперах на километр (Нп/км) или децибелах на километр (дБ/км); а β — показатель *изменения фазы* падающего (отраженного) напряжения (тока) на единице длины ДЛ, который называют *коэффициентом*

фазы и измеряют в радианах на секунду ($\frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{км}}$) или градусах на километр.

Поскольку изменение фазы на длине волны λ равно 2π , т.е. $\beta\lambda = 2\pi$, то

$$\beta = 2\pi/\lambda, \quad (5.43)$$

где длина волны воздействия $\lambda = V_{\phi} T$, а фазовая скорость

$$V_{\phi} = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/\beta}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (5.44)$$

Параметр $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ (1/км) называют **коэффициентом распространения**, а отношение $\frac{U_{\text{п}}}{I_{\text{п}}} = \underline{Z}_{\text{в}} = \rho + jX_{\text{в}}$ — **комплексным волновым сопротивлением** ДЛ и измеряют в омах (Ом).

Найдем коэффициенты \underline{A}_1 и \underline{A}_2 из граничных условий для (5.41):

- при $x = 0$, т.е. в начале ДЛ,

$$\underline{U}_{\text{н}} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \quad \underline{I}_{\text{н}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{в}}}(\underline{A}_1 - \underline{A}_2).$$

Тогда $\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_{\text{н}} + \underline{I}_{\text{н}} \underline{Z}_{\text{в}})$; $\underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_{\text{н}} - \underline{I}_{\text{н}} \underline{Z}_{\text{в}})$;

- при $x = l$, т.е. в конце ДЛ,

$$\underline{U}_{\text{к}} = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}l) + \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}l);$$

$$\underline{I}_{\text{к}} = \underline{A}_1 \exp(-\underline{\gamma}l) \frac{1}{\underline{Z}_{\text{в}}} - \underline{A}_2 \exp(\underline{\gamma}l) \frac{1}{\underline{Z}_{\text{в}}}.$$

Тогда

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_{\text{к}} + \underline{I}_{\text{к}} \underline{Z}_{\text{в}}) \exp(\underline{\gamma}l);$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_{\text{к}} - \underline{I}_{\text{к}} \underline{Z}_{\text{в}}) \exp(-\underline{\gamma}l). \quad (5.45)$$

После подстановки (5.45) в (5.41) получим (убедиться самостоятельно):

$$\begin{aligned}
 \underline{U} &= \frac{(\underline{U}_k + \underline{I}_k \underline{Z}_B)}{2} \exp[\underline{\gamma}(l-x)] + \\
 &+ \frac{(\underline{U}_k - \underline{I}_k \underline{Z}_B)}{2} \exp[-\underline{\gamma}(l-x)] = \\
 &= \underline{U}_k \frac{\exp(\underline{\gamma}x') + \exp(-\underline{\gamma}x')}{2} + \\
 &+ \underline{I}_k \underline{Z}_B \frac{\exp(\underline{\gamma}x') - \exp(-\underline{\gamma}x')}{2}; \\
 \underline{U} &= \underline{U}_k \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x') + \underline{I}_k \underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x'); \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

$$\underline{I} = \underline{U}_k \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x') \frac{1}{\underline{Z}_B} + \underline{I}_k \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x'), \quad (5.47)$$

где $x' = l - x$.

Отношение $\frac{U}{I} = \underline{Z}_{\text{вх}}(x')$ является *входным сопротивлением* ДЛ в произвольном сечении x' .

Тогда, разделив (5.46) на (5.47), при $\underline{Z}_H = \frac{U}{I_k}$ получим

$$\underline{Z}_{\text{вх}}(x') = \underline{Z}_B \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x') + \underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x')}{\underline{Z}_B \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x') + \underline{Z}_H \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x')}. \quad (5.48)$$

При $x' = l$ ($x = 0$) напряжение и ток в начале ДЛ при известных напряжении и токе в конце ДЛ равны соответственно

$$\begin{cases} \underline{U}_H = \underline{U}_K \operatorname{ch}(\underline{\gamma} l) + \underline{I}_K \underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma} l); \\ \underline{I}_H = \underline{U}_K \operatorname{sh}(\underline{\gamma} l) \frac{1}{\underline{Z}_B} + \underline{I}_K \operatorname{ch}(\underline{\gamma} l). \end{cases} \quad (5.49)$$

Полученные выражения используются при анализе волновых режимов в ДЛ, а также при анализе передачи энергии электрических сигналов и построении колебательных систем (резонаторов) на отрезках ДЛ.

5.5. Волновые режимы в длинных линиях

5.5.1. Режим бегущих волн

Для удобства анализа волновых режимов в ДЛ введем понятие *комплексного коэффициента отражения по напряжению* в конце ДЛ (при $x' = 0$):

$$\underline{n}_{ук} = \frac{\underline{U}_o}{\underline{U}_п} = \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} \exp(2 \underline{\gamma} x) = \frac{\underline{U}_K - \underline{I}_K \underline{Z}_B}{\underline{U}_K + \underline{I}_K \underline{Z}_B} = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}. \quad (5.50)$$

Аналогично *комплексный коэффициент отражения по току*

$$\underline{n}_{ик} = \frac{\underline{I}_o}{\underline{I}_п} = -\underline{n}_{ук}. \quad (5.51)$$

Таким образом, коэффициент отражения в конце ДЛ характеризует *степень согласования* сопротивления нагрузки \underline{Z}_H и волнового сопротивления ДЛ \underline{Z}_B . В зависимости от значения модуля коэффициента отражения в конце ДЛ $\underline{n}_{ук}$ возможны **три волновых режима**:

- при $\underline{n}_{ук} = 0$ — режим бегущих волн;
- при $\underline{n}_{ук} = 1$ — режим стоячих волн;
- при $0 < \underline{n}_{ук} < 1$ — режим смешанных волн.

Режим бегущих волн (РБВ) — это режим отсутствия в ДЛ отраженных волн ($\underline{U}_o = \underline{I}_o = 0$), что при конечной длине ДЛ возможно только при $\underline{n}_{ук} = 0$, т.е. согласно (5.50) при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$.

Согласно (5.46) и (5.47) при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_K \left[\operatorname{ch}(\underline{\gamma} x') + \operatorname{sh}(\underline{\gamma} x') \right] = \underline{U}_K \exp(\underline{\gamma} x') = \\ &= \underline{U}_K \exp[\underline{\gamma}(l-x)] = \underline{U}_K \exp(\underline{\gamma} l) \exp(-\underline{\gamma} x) = \\ &= \underline{U}_H \exp(-\underline{\gamma} x) = \underline{U}_П; \\ \underline{I} &= \underline{I}_H \exp(-\underline{\gamma} x) = \underline{I}_П. \end{aligned}$$

Тогда распределение амплитуд напряжения и тока вдоль ДЛ примет вид, приведенный на рис. 5.18.

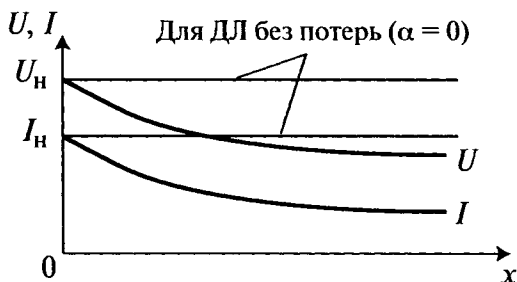


Рис. 5.18

Согласно (5.48) при $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$ входное сопротивление в РБВ

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_B = \underline{Z}_H,$$

а в ДЛ без потерь ($R_n = G_n = 0$; $\alpha = 0$) $U_n = U_H$; $I_n = I_H$, т.е.

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_B = \sqrt{L_n/C_n} = \rho.$$

Выводы:

1. В ДЛ с потерями в режиме бегущих волн амплитуды падающих (бегущих к концу линии) волн напряжения и тока снижаются к концу ДЛ по экспоненте. Поскольку отраженные волны отсутствуют, то в нагрузку поступает максимальная энергия (мощность) воздействия (сигнала). Такой режим используется в фидерных линиях для передачи энергии электрических сигналов, например, в антенну (из антенны).

2. В режиме бегущих волн входное сопротивление ДЛ $\underline{Z}_{вх}$ в любом сечении равно волновому сопротивлению $\underline{Z}_в$, а для ДЛ без потерь (падающие волны не затухают) входное сопротивление в любом сечении является резистивным и равно ρ .

5.5.2. Режим стоячих волн

Режим стоячих волн (РСВ) — это режим равенства распределений амплитуд падающей и отраженной волн, что возможно при выполнении двух условий:

1) в ДЛ нет потерь, т.е. $\alpha = 0$ (*необходимое условие*);
 2) модули $n_{ик}$ и $n_{ик}$ равны 1 (*достаточное условие*), что, согласно (5.50) и (5.51), выполняется в следующих случаях:

- а) $\underline{Z}_н = 0$ (короткозамкнутая нагрузка в конце ДЛ);
- б) $\underline{Z}_н = \infty$ (отсутствие нагрузки в конце ДЛ);
- в) $\underline{Z}_н = \pm jX_н$ (чисто реактивная нагрузка).

В последнем случае, согласно (5.50), получим

$$\underline{n}_{ик} = \frac{\pm jX_н - \rho}{\pm jX_н + \rho}, \text{ т.е. модуль } n_{ик} = \sqrt{\frac{X_н^2 + \rho^2}{X_н^2 + \rho^2}} = 1.$$

Рассмотрим распределение амплитуд напряжения и тока вдоль ДЛ в этом режиме, для чего воспользуемся свойствами гиперболических функций:

$$\text{ch}(\alpha + j\beta) = \text{ch}\alpha \cos\beta + j\text{sh}\alpha \sin\beta;$$

$$\text{sh}(\alpha + j\beta) = \text{sh}\alpha \cos\beta + j\text{ch}\alpha \sin\beta.$$

При $\alpha = 0$: $\text{ch}(j\beta) = \cos\beta$ и $\text{sh}(j\beta) = j\sin\beta$.

Из (5.46) и (5.47) при $\alpha = 0$, т.е. при $\underline{\gamma} = j\beta$, получим

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_к \cos(\beta x') + j\rho \underline{I}_к \sin(\beta x'); \\ \underline{I} = \underline{I}_к \cos(\beta x') + j\frac{\underline{U}_к}{\rho} \sin(\beta x'). \end{cases} \quad (5.52)$$

а) При $\underline{Z}_H = 0$, т.е. при $U_K = 0$:

$$\underline{U} = j\rho \underline{I}_K \sin(\beta x'); \quad \underline{I} = \underline{I}_K \cos(\beta x').$$

Тогда входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}/\underline{I} = j\rho \operatorname{tg}(\beta x'). \quad (5.53)$$

Построим графики распределения модулей амплитуд напряжения, тока и входного сопротивления (рис. 5.19).

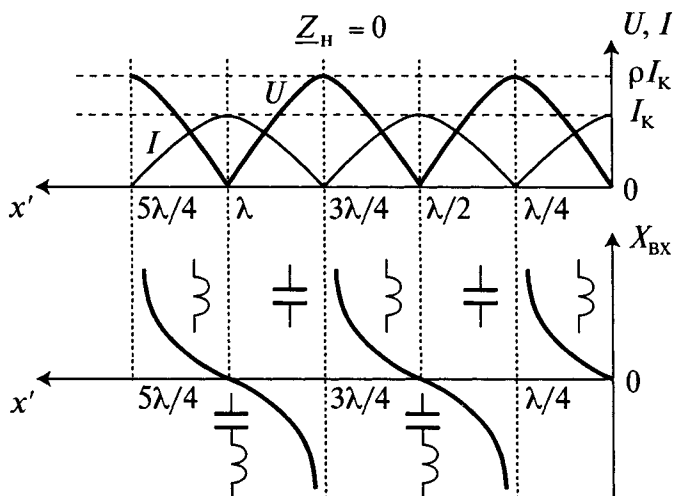


Рис. 5.19

Выводы:

1. В результате интерференции падающей и отраженной волн в ДЛ образуется стоячая волна с фиксированными «узлами» напряжения или тока, в которых $U(x') = 0$ или $I(x') = 0$, и «пучностями», в которых $U_{\text{max}}(x')$ или $I_{\text{max}}(x')$; положение «узлов» и «пучностей» на оси x' не зависит от времени.

2. Сечения ДЛ, где расположены «узлы» и «пучности», называют **резонансными**, так как в этих сечениях либо $X_{\text{вх}} = 0$ (резонанс напряжений в ПСК), либо $X_{\text{вх}} = \infty$ (резонанс токов в ПРК), причем резонансные сечения чередуются с интервалом $\lambda/4$. В резонансных сечениях длинная линия эквивалентна последовательному или параллельному ОКК, что используется для построения резонаторов на отрезках ДЛ в УКВ- и СВЧ-радиотехнике.

3. Энергия вдоль ДЛ не передается (волна как бы «стоит»), при этом в местах «стояния» энергия «пульсирует» во времени, переходя из электрического поля в магнитное и наоборот.

4. Входное сопротивление в произвольном сечении x' является реактивным с характером, чередующимся через четверть длины волны.

5. Короткозамкнутый в конце участок ДЛ длиной $l' < \frac{\lambda}{4}$ эквивалентен индуктивному элементу.

б) При $\underline{Z}_H = \infty$, т.е. при $\underline{I}_K = 0$:

$$\underline{U} = \underline{U}_K \cos(\beta x'); \quad \underline{I} = j \frac{\underline{U}_K}{\rho} \sin(\beta x').$$

Тогда входное сопротивление

$$\underline{Z}_{ВХ} = \underline{U}/\underline{I} = -j\rho \operatorname{ctg}(\beta x'). \quad (5.54)$$

Построим графики распределения модулей амплитуд напряжения, тока и входного сопротивления (рис. 5.20).

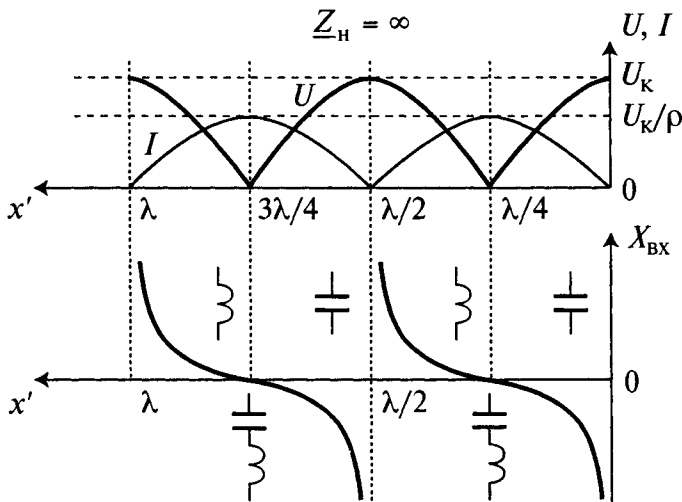


Рис. 5.20

Выводы (по сравнению с предыдущим случаем):

1. Распределения U , I и $X_{вх}$ сдвинуты на четверть длины волны.

2. Разомкнутый в конце участок ДЛ длиной $l' < \frac{\lambda}{4}$ эквивалентен емкостному элементу.

в) При $Z_{н} = \pm jX_{н}$, т.е. при чисто реактивной нагрузке, ее можно заменить эквивалентным отрезком ДЛ длиной $l' < \frac{\lambda}{4}$, короткозамкнутым (при $+jX_{н}$) или разомкнутым (при $-jX_{н}$) в конце, что увеличивает на l' электрическую длину ДЛ. При этом получим один из предыдущих случаев распределения в РСВ. Следует помнить, что увеличивается только электрическая длина ДЛ, а физическая длина сохраняется неизменной. Так, ДЛ с физической длиной l и индуктивной нагрузкой L «удлинняется» на короткозамкнутый участок длиной l' , входное сопротивление которого равно ωL (рис. 5.21).

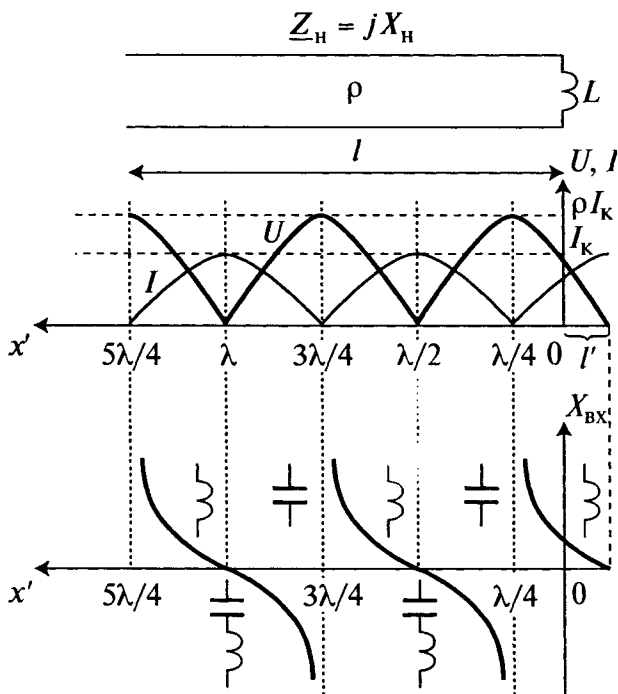


Рис. 5.21

5.5.3. Режим смешанных волн

Режим смешанных волн (РСмВ) — это реальный режим, который является промежуточным между двумя идеальными режимами: РБВ и РСВ, т.е. РСмВ имеет место при любой нагрузке, кроме обеспечивающих идеальные режимы (РБВ и РСВ).

Рассмотрим распределение амплитуд напряжения, тока и входного сопротивления при резистивной нагрузке R_H в ДЛ без потерь ($\alpha = 0$).

Тогда из (5.52) получим:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_k \left[\cos(\beta x') + j \frac{\rho}{R_H} \sin(\beta x') \right]; \\ \underline{I} = \underline{I}_k \left[\cos(\beta x') + j \frac{R_H}{\rho} \sin(\beta x') \right]. \end{cases}$$

Входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{U}/\underline{I} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}.$$

При $x' = 0$:

$$\underline{U}(0) = U_k; \quad \underline{I}(0) = I_k; \quad \underline{Z}_{\text{вх}} = R_H,$$

т.е. в конце ДЛ находится резонансное сечение ($X_{\text{вх}} = 0$).

При $x' = \frac{\lambda}{4}$ с учетом (5.43):

$$\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\underline{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\rho^2}{R_H}$, т.е. сечения, кратные

четверти длины волны, являются *резонансными*.

В зависимости от соотношения между R_H и ρ возможны следующие частные случаи:

- при $R_H = \rho$ получим РБВ;
- при $R_H > \rho$ получим РСМВ с распределениями напряжения, тока и входного сопротивления, приведенными на рис. 5.22, а;
- при $R_H < \rho$ получим РСМВ с распределениями напряжения, тока и входного сопротивления, приведенными на рис. 5.22, б.

Отношение $\frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = K_6$ называют *коэффициентом бегущих волн* (КБВ), при этом получим:

а) $R_H > \rho$

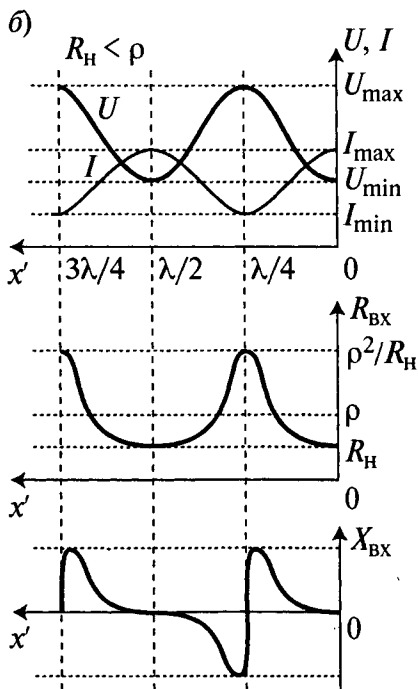
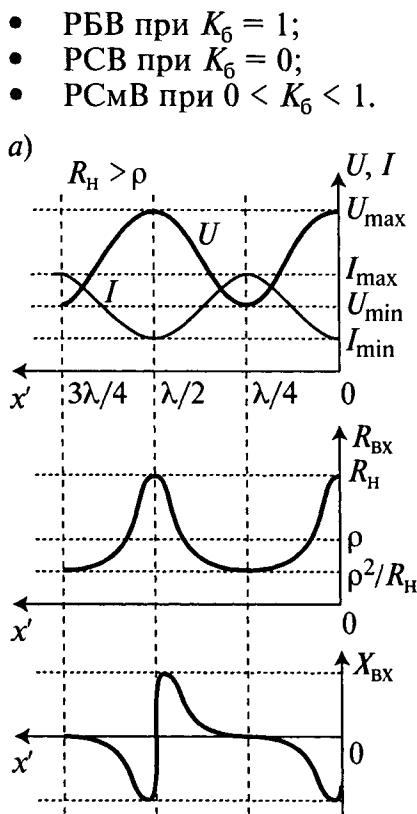


Рис. 5.22

Поскольку: $U_{\min} = U_{\Pi} - U_o = U_{\Pi}(1 - n_{\text{ук}})$,

$$U_{\max} = U_{\Pi} + U_o = U_{\Pi}(1 + n_{\text{ук}}),$$

то
$$K_6 = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{1 - n_{\text{ук}}}{1 + n_{\text{ук}}}, \quad n_{\text{ук}} = \frac{1 - K_6}{1 + K_6}. \quad (5.55)$$

При резистивной нагрузке $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}}$ коэффициент K_6 определяется отношениями:

$$K_6 = \frac{R_{\text{н}}}{\rho} \text{ при } R_{\text{н}} < \rho \text{ и } K_6 = \frac{\rho}{R_{\text{н}}} \text{ при } R_{\text{н}} > \rho. \quad (5.56)$$

5.6. Согласование длинной линии с нагрузкой

5.6.1. Проблемы согласования в длинных линиях

Длинные линии, предназначенные для передачи энергии сигналов от источника (приемной антенны, передатчика) в нагрузку (передающую антенну, приемник), называют *фидерами*.

Для фидеров существует две основные проблемы:

- обеспечение передачи с максимальным КБВ;
- обеспечение безыскаженной передачи сигналов.

Проблема обеспечения максимального КБВ разрешается путем согласования сопротивления нагрузки с волновым сопротивлением фидера ($Z_{\text{в}} = Z_{\text{н}}$), что способствует наибольшему приближению к РБВ ($K_6 \approx 1$).

Поскольку в режиме бегущих волн $Z_{\text{вх}} = Z_{\text{в}} = Z_{\text{н}}$, то КПД, как отношение резистивной мощности в конце ДЛ $P_{\text{к}}$ к резистивной мощности в начале ДЛ $P_{\text{н}}$, равен

$$\eta = \frac{P_{\text{к}}}{P_{\text{н}}} = \frac{U_{\text{к}}^2}{U_{\text{н}}^2} = \frac{U_{\text{к}}^2}{U_{\text{к}}^2 \exp(\alpha l)^2} = \exp(-2\alpha l).$$

Таким образом, КПД ДЛ зависит только от собственного ослабления фидера (αl), определяемого потерями в фидере и его длиной.

Чтобы согласовать фидер с нагрузкой, необходимо знать или уметь определять его волновое сопротивление, которое для простейших фидеров (см. рис. 5.16) может быть найдено по следующим эмпирическим формулам:

для симметричных ДЛ

$$\rho = 120 \ln \frac{d}{r}; \quad (5.57)$$

для несимметричных ДЛ

$$\rho = 60 \ln \frac{R}{r}. \quad (5.58)$$

Проблема обеспечения безыскаженной передачи сигналов по фидеру разрешается путем выполнения следующих условий для амплитуд и фаз:

$$\alpha = K_1, \quad \beta = \omega K_2,$$

где K_1 и K_2 — постоянные коэффициенты.

Согласно (5.39) при условии Хевисайда

$$\frac{L_{\Pi}}{R_{\Pi}} = \frac{C_{\Pi}}{G_{\Pi}} \quad (5.59)$$

получим

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{R_{\Pi} G_{\Pi} \left(1 + j\omega \frac{L_{\Pi}}{R_{\Pi}}\right) \left(1 + j\omega \frac{C_{\Pi}}{G_{\Pi}}\right)} = \\ &= \sqrt{R_{\Pi} G_{\Pi}} + j\omega \sqrt{L_{\Pi} C_{\Pi}} = \alpha + j\beta. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha = \sqrt{R_{\Pi} G_{\Pi}} = K_1$ и $\beta = \omega \sqrt{L_{\Pi} C_{\Pi}} = \omega K_2$, то условие (5.59) является **условием безыскаженной передачи сигналов по фидерным линиям связи**. Так как в реальных

фидерах $\frac{L_{\Pi}}{R_{\Pi}} \ll \frac{C_{\Pi}}{G_{\Pi}}$, то для обеспечения условия (5.59)

применяют:

- *пупинизацию кабельных линий связи с помощью включаемых в них последовательно «катушек Пупина» — индуктивных элементов, что увеличивает величину L_{Π} ;*
- *амплитудные и фазовые корректоры.*

5.6.2. Входное сопротивление нагруженного фидера

Чтобы согласовать нагруженный фидер с источником, необходимо знать или уметь определять его входное сопротивление в произвольном сечении $Z_{\text{вх}}(x')$.

Поскольку в фидерах потери обычно малы, то полагаем $\alpha \approx 0$. Тогда из (5.48) получим

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{вх}}(x') &= \rho \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \cos(\beta x') + j\rho \sin(\beta x')}{\rho \cos(\beta x') + j\underline{Z}_{\text{н}} \sin(\beta x')} = \\ &= R_{\text{вх}}(x') + jX_{\text{вх}}(x'). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Рассмотрим частные случаи из (5.60).

1. При $x' = \frac{\lambda}{2}$: $\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$;

$$\underline{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \underline{Z}_{\text{н}}.$$

Таким образом, полуволновой отрезок ДЛ «повторяет» сопротивление нагрузки на своем входе и может быть использован для измерения сопротивления нагрузки.

2. При $x' = (1, 3, 5, \dots) \frac{\lambda}{4}$: $\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$;

$$\underline{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\rho^2}{\underline{Z}_{\text{н}}}. \quad (5.61)$$

Таким образом, четвертьволновой отрезок ДЛ «инвертирует» (трансформирует) величину и характер сопротивления нагрузки.

3. При $x' = \frac{\lambda}{8}$: $\beta x' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4}$;

$$\underline{Z}_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{8}\right) = \rho \frac{\underline{Z}_{\text{н}} \pm j\rho}{\rho \pm j\underline{Z}_{\text{н}}}. \quad (5.62)$$

При $x' = (1, 5, 9, \dots) \frac{\lambda}{8}$ берем знак «+», при $x' = (3, 7, 11, \dots) \frac{\lambda}{8}$ знак «-». Модуль входного сопротивления

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{\sqrt{Z_{\text{н}}^2 + \rho^2}}{\sqrt{Z_{\text{н}}^2 + \rho^2}} = \rho.$$

Таким образом, отрезок ДЛ длиной $\lambda/8$ «сохраняет» модуль входного сопротивления равным ρ при любом сопротивлении нагрузки.

При $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} > \rho$, т.е. при $K_{\text{б}} = \rho/R_{\text{н}}$, получим:

$$R_{\text{вх}}(x') = \rho \frac{K_{\text{б}} [1 + \text{tg}^2(\beta x')]}{K_{\text{б}}^2 + \text{tg}^2(\beta x')};$$

$$X_{\text{вх}}(x') = \rho \frac{(K_{\text{б}}^2 - 1) \text{tg}(\beta x')}{K_{\text{б}}^2 + \text{tg}^2(\beta x')}.$$
(5.63)

По (5.63) построим графики для $R_{\text{вх}}(x')$ и $X_{\text{вх}}(x')$ (рис. 5.23).

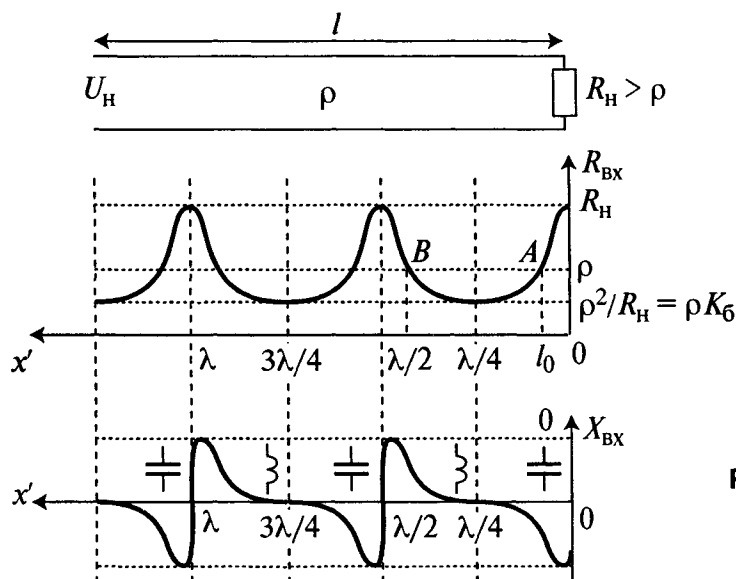


Рис. 5.23

При $R_H < \rho$ графики на рис. 5.23 сместятся вправо (влево) на четверть длины волны. В ближайших от конца сечениях A и B длинная линия согласована с нагрузкой, так как $R_{вх} = \rho$.

Характер $X_{вх}$ чередуется через четверть длины волны.

5.6.3. Согласование фидера с нагрузкой

Согласование фидера с нагрузкой имеет целью обеспечить в нем *режим бегущих волн*. Наиболее распространены два метода согласования: с помощью четвертьволнового трансформатора и с помощью шлейфов Татаринова.

1. **Согласование с помощью четвертьволнового трансформатора**, включаемого в ближайшее от конца ДЛ резонансное сечение.

Условие согласования:

$$\rho = Z_{вх.Т}$$

Поскольку согласно (5.61) $Z_{вх.Т} = \frac{\rho_T^2}{R_H}$, то

$$\rho_T = \sqrt{\rho R_H}$$

Если резонансное сечение в конце ДЛ, то получим при $R_H > \rho$ схему на рис. 5.24, а, а при $R_H < \rho$ схему на рис. 5.24, б.

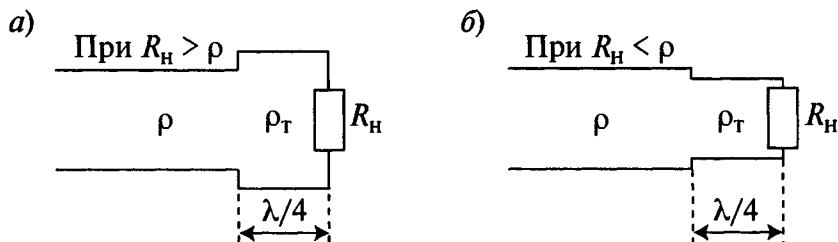


Рис. 5.24

Таким образом, выбором величины ρ_T обеспечивается режим бегущих волн от входа ДЛ до входа четвертьволнового согласующего трансформатора. В самом согласующем трансформаторе создается режим смешанных волн, но им можно пренебречь, так как длина четвертьволнового согласующего трансформатора значительно меньше длины ДЛ.

Если нагрузка комплексная, то резонансное сечение будет находиться не в конце ДЛ, а недалеко от него. Поэтому четвертьволновой согласующий трансформатор включают в это резонансное сечение.

В коаксиальных ДЛ этот метод реализуют с помощью четвертьволновых «пробок», т.е. участков изолятора с другим материалом диэлектрика (рис. 5.25).

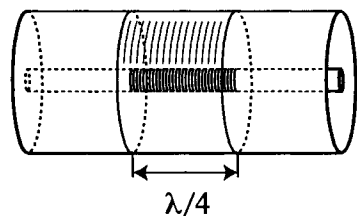


Рис. 5.25

В этом случае используют эмпирическую формулу

$$\rho_T = 138 \cdot 10^3 \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \ln \left(\frac{R}{r} \right),$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость материала «пробки».

2. **Согласование с помощью шлейфов Татаринова** (шлейф — это короткозамкнутый отрезок той же ДЛ длиной $l_{ш}$). При использовании одного шлейфа Татаринова его подключают в сечение А, в котором $R_{вх} = \rho$, на расстоянии l_0 от конца ДЛ (рис. 5.26).

Поскольку шлейф подключается параллельно, то удобнее использовать при анализе не входное сопротивление, а входную проводимость $Y_{вх} = 1/Z_{вх}$. Тогда входная проводимость шлейфа с учетом (5.53)

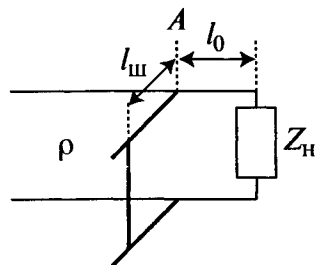


Рис. 5.26

$$Y_{ш} = \frac{1}{Z_{ш}} = \frac{1}{j\rho \operatorname{tg}(\beta l_{ш})} = -jB_{ш}.$$

Если входная проводимость ДЛ в сечении A на расстоянии l_0 от конца ДЛ равна $\underline{Y}_0 = \frac{1}{\rho} + jB_0$, то выбором длины шлейфа $l_{ш}$ добиваются того, чтобы модули B_0 и $B_{ш}$ были равны и противоположны по характеру, т.е. обеспечивают их взаимную компенсацию. Тогда общая проводимость в сечении A будет чисто резистивной и равной $1/\rho$:

$$\underline{Y}'_0 = \underline{Y}_0 + \underline{Y}_{ш} = \frac{1}{\rho} + jB_0 - jB_{ш} = \frac{1}{\rho}, \text{ а } Z'_0 = \rho.$$

Таким образом, от входа фидера до сечения A установится *режим бегущих волн*, а после сечения A — *режим смешанных волн*, но поскольку $l_0 \ll l$, им можно пренебречь.

Требуемая длина шлейфа $l_{ш} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\rho B_{ш}}$ обеспечивается путем перемещения перемычки на шлейфе. При этом контролируют величину K_6 , стремясь добиться $K_6 \approx 1$ (РБВ).

5.7. Активные четырехполюсники

5.7.1. Критерии активности четырехполюсников

Необходимым критерием активности ЧП является наличие источников электрической энергии (источников воздействия, источников питания и т.п.). При этом различают *неуправляемые* и *управляемые* (идеализированные и реальные) источники напряжения или тока.

Однако одного наличия источников недостаточно. Так, встречное включение двух одинаковых источников напряжения в одной ветви или двух источников тока в параллельных ветвях не вызывает никакого эффекта по отношению к внешним цепям. Поэтому **достаточным критерием активности ЧП** является *отдача электрической энергии во внешние цепи*.

Известно, что электрическая цепь отдает электрическую энергию, если ее мгновенная мощность отрицательна (см. введение), что обеспечивается при различных направлениях мгновенного напряжения u и тока i ,

т.е. при *отрицательном сопротивлении цепи* $Z = \frac{u}{i} < 0$.

Такой критерий применяется при анализе активности двухполюсников.

Для четырехполюсников критерием активности является *превышение электрической энергии на выходе над электрической энергией на входе*, поскольку отдача электрической энергии осуществляется на выходе.

К активным четырехполюсникам относятся управляемые источники напряжения или тока:

- односторонние без обратной связи (усилители);
- односторонние с внешней обратной связью (усилители);
- двусторонние с внутренней обратной связью (преобразователи сопротивлений).

5.7.2. Односторонние управляемые источники и их реализация

Различают четыре вида односторонних управляемых источников:

- источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН);
- источник напряжения, управляемый током (ИНУТ);
- источник тока, управляемый напряжением (ИТУН);
- источник тока, управляемый током (ИТУТ).

Схемы замещения идеализированных односторонних управляемых источников приведены на рис. 5.27.

Эти идеализированные схемы замещения реализуются с помощью операционных усилителей (рис. 5.28), которые обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} Z_{\text{вх}}^+ = Z_{\text{вх}}^- \rightarrow \infty; & Z_{\text{вых}} \rightarrow 0; \\ \Delta U = U_1^+ - U_1^- \rightarrow 0; \\ K_u = U_2 / \Delta U \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.64)$$

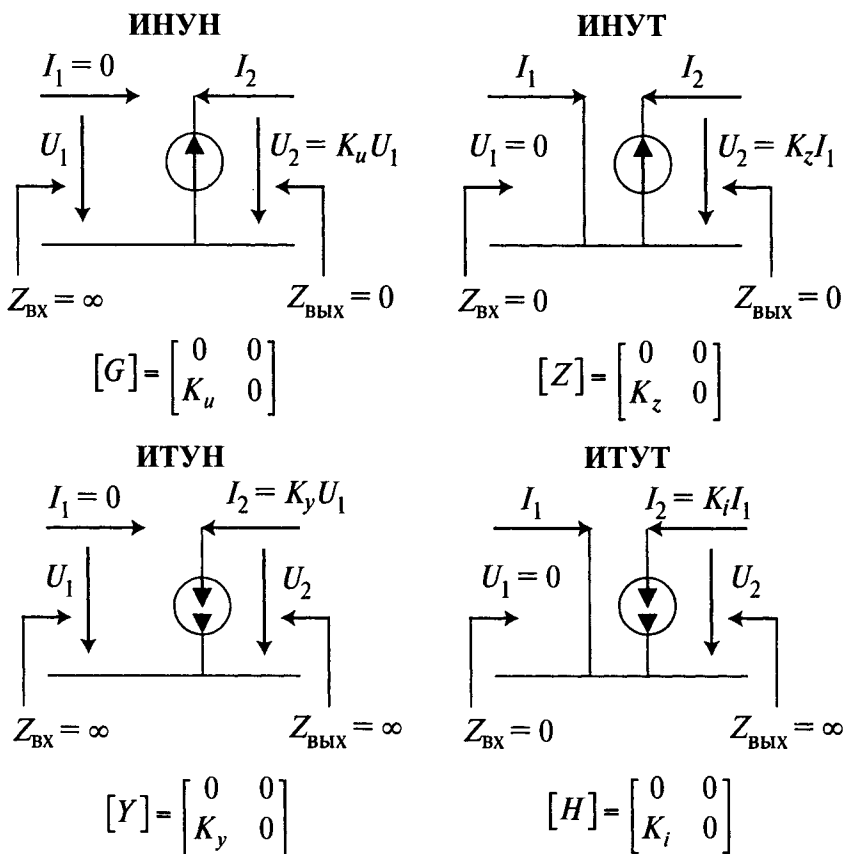


Рис. 5.27

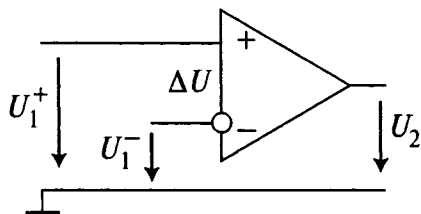


Рис. 5.28

Тогда получим схемы реализации, приведенные на рис. 5.29.

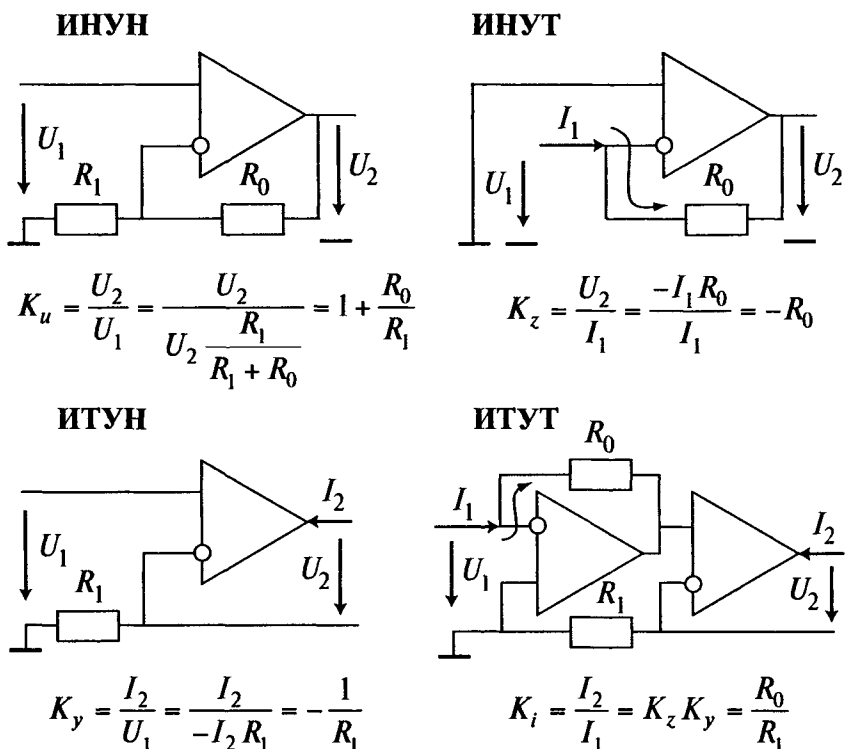


Рис. 5.29

5.7.3. Преобразователи сопротивлений

Преобразователи сопротивлений (ПС) — это четырехполюсники, предназначенные для изменения величины, знака и характера сопротивлений нагрузки. Они бывают пассивными и активными.

Пассивные ПС изменяют только величину и характер сопротивлений нагрузки. К пассивным ПС относятся:

- *идеальный трансформатор*, входное сопротивление которого, согласно (2.37), равно \underline{Z}_H/n^2 , т.е. изменяется (конвертируется) величина \underline{Z}_H при изменении коэффициента трансформации n ;

- *четвертьволновой трансформатор* на отрезке ДЛ, входное сопротивление которого, согласно (5.61), равно ρ^2 / \underline{Z}_H , т.е. изменяются величина (конвертируется) и характер (инвертируется) \underline{Z}_H .

Активные ПС изменяют также знак сопротивления нагрузки, что позволяет получить отрицательные параметры цепей. К активным ПС относятся *двусторонние управляемые источники*, которые реализуют путем параллельного соединения:

- входа ИНУН (ИТУТ) с выходом ИТУТ (ИНУН), а выхода ИНУН (ИТУТ) со входом ИТУТ (ИНУН);
- входа (выхода) одного ИНУТ (ИТУН) с выходом (входом) другого ИНУТ (ИТУН).

Конвертором сопротивлений (КС) является четырехполюсник, операторное входное сопротивление которого определяется выражением

$$Z_{\text{вх}} = K_k Z_H, \quad (5.65)$$

где K_k — коэффициент конверсии. При $K_k > 0$ получим *конвертор положительных сопротивлений* (КПС), а при $K_k < 0$ — *конвертор отрицательных сопротивлений* (КОС).

Заметим, что КПС реализуется как активными, так и пассивными цепями, а КОС — только активными четырехполюсниками.

Активные конверторы сопротивлений — это двусторонние управляемые источники с матрицей A -параметров, в которой $A_{12} = A_{21} = 0$. Поскольку при $A_{12} = A_{21} = 0$ входное сопротивление [см. (5.3)] $Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}}{A_{22}} Z_H$, то со-

гласно (5.65) $K_k = \frac{A_{11}}{A_{22}}$.

Рассмотрим типовую схему реализации КОС на операционном усилителе (рис. 5.30), которая является базовой при реализации всех остальных схем активных ПС.

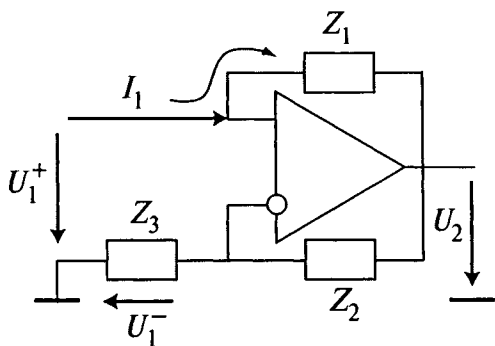


Рис. 5.30

В этой схеме

$$U_1^+ = U_1^- = U_1 = U_2 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3};$$

$$U_2 = \frac{U_1(Z_2 + Z_3)}{Z_3}; \quad I_1 = \frac{U_1 - U_2}{Z_1} = -\frac{U_1 Z_2}{Z_1 Z_3}.$$

Тогда

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = -\frac{Z_1 Z_3}{Z_2}. \quad (5.66)$$

Рассмотрим два случая, вытекающие из (5.66).

1. Включение резистивной нагрузки $Z_{\text{н}}$ вместо Z_3 (или Z_1 , но лучше вместо Z_3 , которое заземлено, что снижает помехи от электромагнитных наводок) обеспечивает реализацию КОС с коэффициентом конверсии

$$K_{\text{к}} = \frac{-Z_1}{Z_2}.$$

При выборе $Z_1 = R_1$ и $Z_2 = R_2$ вместо положительных нагрузок R, L, C можно получить отрицательные элементы: $-R, -L, -C$, при этом их величина может быть также изменена (конвертирована).

Например, схема получения отрицательного резистивного сопротивления на входе $R_{\text{вх}} = -10$ МОм при сопротивлении нагрузки $R_3 = R_{\text{н}} = 1$ кОм имеет вид, приведенный на рис. 5.31.

При $R_1 = 100 \text{ кОм}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_H = R_3 = 1 \text{ кОм}$

$$R_{\text{вх}} = -\frac{R_1 R_H}{R_2} = -\frac{10^5 \cdot 10^3}{10} = -10 \text{ МОм.}$$

Для получения положительных элементов R , L , C другого номинала (величины) вместо одного из сопротивлений R_1 или R_2 включают схему КОС, реализующую отрицательные элементы ($-R_1$) или ($-R_2$).

Например, схема получения $R_{\text{вх}} = 10 \text{ МОм}$ включает схему получения отрицательного сопротивления ($-R_2$) и имеет вид, приведенный на рис. 5.32.

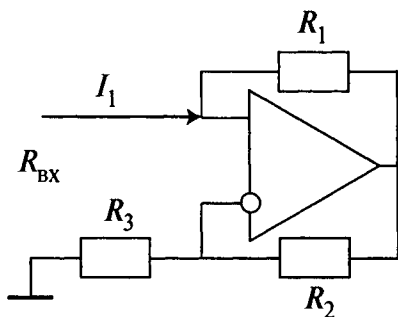


Рис. 5.31

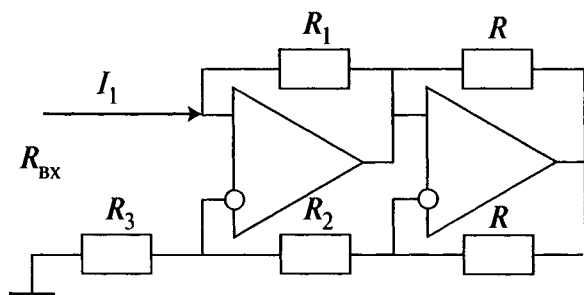


Рис. 5.32

Сопротивления R_1 , R_2 и R_3 имеют те же номиналы, что и в предыдущем случае (см. рис. 5.31), а R может быть любым, например $R = 1 \text{ кОм}$.

2. Включение емкостной нагрузки вместо сопротивлений Z_1 и Z_3 обеспечивает реализацию *отрицательной суперемкости*:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{-\frac{1}{sC_1} \frac{1}{sC_3}}{R_2} = \frac{-1}{s^2 C_1 C_3 R_2} = \frac{-1}{s^2 D},$$

где $D = R_2 C_1 C_3$ — величина суперемкости.

Положительная суперемкость реализуется включением вместо резистора R_2 схемы КОС, реализующей $(-R_2)$ (рис. 5.33).

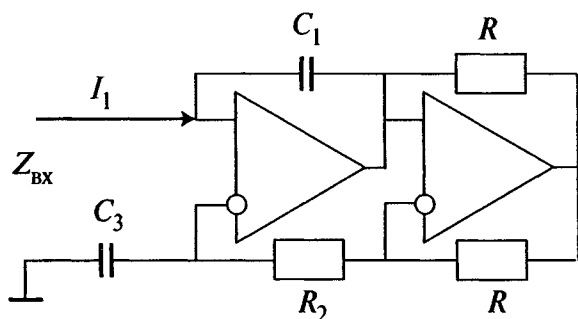


Рис. 5.33

Положительная суперемкость используется при синтезе активных RC -фильтров с заземленными емкостями.

Инвертором сопротивлений (ИС) является четырехполюсник, операторное входное сопротивление которого определяется выражением

$$Z_{\text{вх}} = \frac{K_{\text{и}}}{Z_{\text{н}}}, \quad (5.67)$$

где $K_{\text{и}}$ — коэффициент инверсии. При $K_{\text{и}} > 0$ получим *инвертор положительных сопротивлений (ИПС)*, а при $K_{\text{и}} < 0$ — *инвертор отрицательных сопротивлений (ИОС)*.

Активные инверторы сопротивлений — это двусторонние управляемые источники с матрицей A -параметров, в которой $A_{11} = A_{22} = 0$. Поскольку при $A_{11} = A_{22} = 0$ входное сопротивление [см. (5.3)] $Z_{\text{вх}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{12}}{A_{21}} \frac{1}{Z_{\text{н}}}$, то

$$K_{\text{и}} = \frac{A_{12}}{A_{21}}.$$

Из (5.66) и (5.67) следует, что инвертор сопротивлений можно получить из схемы КОС, если нагрузку включить вместо сопротивления Z_2 , тогда коэффициент инверсии $K_{\text{и}} = -R_1 R_3$, т.е. получим ИОС.

Для получения ИПС следует вместо R_3 включить схему КОС, реализующую отрицательное R_3 .

Схему активного ИПС называют *гиратором* и используют для получения искусственных индуктивных элементов. Например, схема реализации индуктивности $L = 10^6$ Гн имеет вид, приведенный на рис. 5.34.

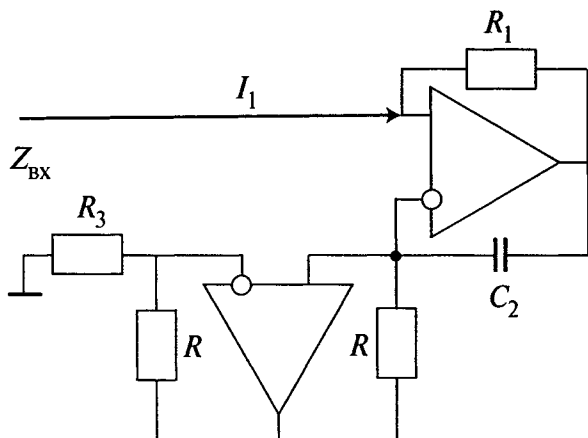


Рис. 5.34

При $R_1 = R_3 = 100$ кОм и $C_H = C_2 = 100$ мкФ

$$Z_{\text{вх}} = \frac{-R_1(-R_3)}{\frac{1}{sC_2}} = sR_1R_3C_2 = sL_{\text{вх}},$$

где $L_{\text{вх}} = R_1R_3C_2 = 10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 10^6$ Гн.

Конверторы и инверторы сопротивлений широко используются при реализации активных фильтров, усилителей и других устройств.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Первичные параметры четырехполюсников.
2. Виды составных четырехполюсников.
3. Схемы замещения четырехполюсников.

4. Определение характеристического сопротивления и характеристической постоянной передачи.
5. Понятия вносимого и рабочего ослабления четырехполюсника. Почему вносимое ослабление меньше рабочего?
6. Отличие цепей с распределенными параметрами от цепей с сосредоточенными параметрами.
7. Первичные параметры длинных линий.
8. Физический смысл вторичных параметров четырехполюсников.
9. Условия получения различных волновых режимов.
10. Проблемы и методы согласования в длинных линиях.
11. Критерии активности и виды активных четырехполюсников.
12. Сущность конверсии и инверсии сопротивлений.
13. Назначение гираторов.

Тема 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

6.1. Активная линейная электрическая цепь с обратной связью

6.1.1. Операторная передаточная функция цепи с обратной связью

Обратная связь (ОС) — это влияние выхода активного четырехполюсника на его вход. Без обратной связи невозможны системы автоматического управления (регулирования), системы адаптации (приспособления) в кибернетике и биологии, системы управления производством, экономикой и обществом в целом и т.д.

Обратная связь может быть *внешней* (образованной с помощью внешней цепи ОС) и *внутренней* (создаваемой за счет свойств активного элемента цепи: радиолампы, транзистора и др.). Например, двусторонние управляемые источники (см. 5.7.3) содержат, кроме выходных источников, входные источники напряжения или тока, параметры которых зависят от величины выходного напряжения или тока, т.е. имеют внутреннюю обратную связь.

Рассмотрим обобщенную схему активной линейной электрической цепи с внешней обратной связью — АЛЭЦ с внешней ОС (рис. 6.1).

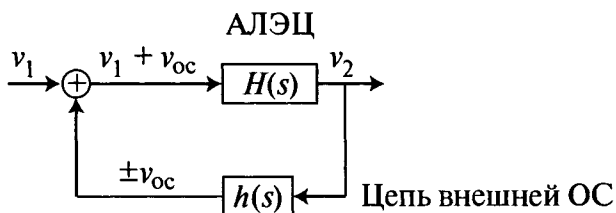


Рис. 6.1

Если обозначить

$$H(s) = H = \frac{v_2}{v_1 \pm v_{oc}}, \quad v_1 = \frac{v_2}{H} \mp v_{oc},$$

$$h(s) = h = \frac{v_{oc}}{v_2}, \quad v_2 = \frac{v_{oc}}{h},$$

то операторная передаточная функция (ОПФ) АЛЭЦ с внешней ОС

$$H_{oc}(s) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{v_{oc}}{h}}{\frac{v_2}{H} \mp v_{oc}} = \frac{\frac{v_{oc}}{h} \frac{H}{v_2}}{1 \mp v_{oc} \frac{H}{v_2}} = \frac{H}{1 \mp hH}. \quad (6.1)$$

Если на входной сумматор АЛЭЦ поступает сигнал $+v_{oc}$ (сигналы v_1 и v_{oc} с ин ф а з н ы е), то ОС называют *положительной обратной связью* (ПОС). Тогда из (6.1) ОПФ АЛЭЦ с ПОС

$$H_{пос}(s) = \frac{H}{1 - hH}. \quad (6.2)$$

Если на входной сумматор АЛЭЦ поступает сигнал $-v_{oc}$ (сигналы v_1 и v_{oc} пр о т и в о ф а з н ы е), то ОС называют *отрицательной обратной связью* (ООС). Тогда из (6.1) ОПФ АЛЭЦ с ООС

$$H_{оос}(s) = \frac{H}{1 + hH}. \quad (6.3)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что ПОС увеличивает коэффициент передачи ($H_{пос} \gg H$), а ООС, наоборот, его снижает ($H_{оос} \ll H$).

Кроме того, при $hH = 1$ получим $H_{пос} = \infty$, что означает самовозбуждение АЛЭЦ с ПОС, т.е. превращение ее в генератор сигналов произвольной формы.

6.1.2. Виды обратных связей

В зависимости от способа подключения входов и выходов внешней цепи ОС к АЛЭЦ различают последовательную и параллельную ОС (рис. 6.2), а также ОС по напряжению и ОС по току (рис. 6.3).

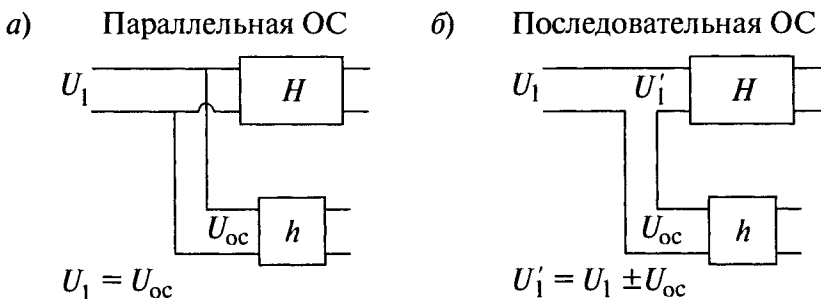


Рис. 6.2

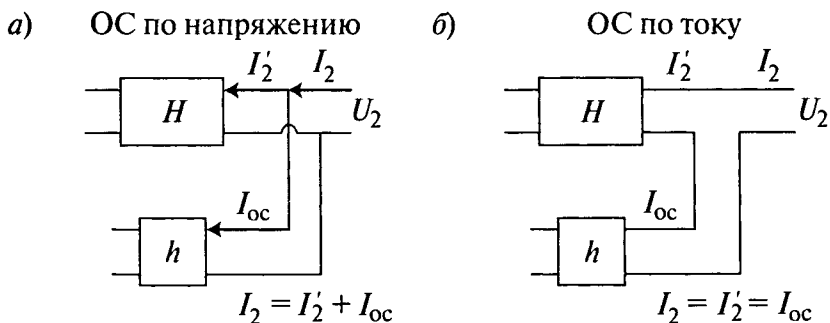


Рис. 6.3

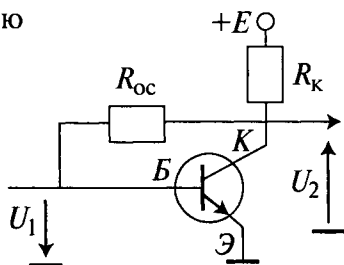
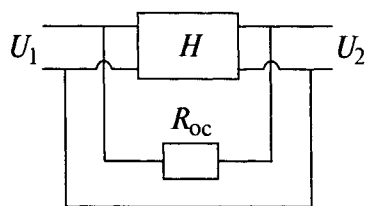
Простейшая цепь ОС состоит из одного резистора R_{oc} (рис. 6.4).

Параллельная ОС по напряжению (см. рис. 6.4, а) снижает входное и выходное сопротивления АЛЭЦ за счет шунтирования их входным и выходным сопротивлениями цепи ОС, а *последовательная ОС по току* (см. рис. 6.4, б), наоборот, повышает входное и выходное сопротивления АЛЭЦ на величину входного и выходного сопротивлений цепи ОС соответственно.

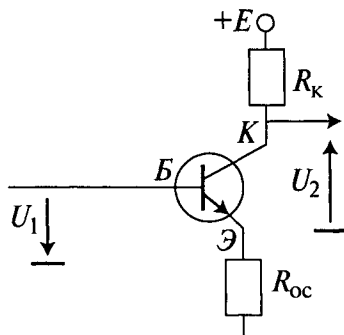
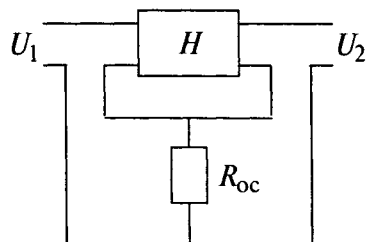
В эмиттерных повторителях используется 100%-ная ($h = 1$) *последовательная ООС по напряжению* (см. рис. 6.4, в), которая повышает $R_{вх}$ и снижает $R_{вых}$.

Наиболее часто в транзисторных усилителях используется *параллельная ОС по току* (см. рис. 6.4, г), которая снижает $R_{вх}$ и повышает $R_{вых}$.

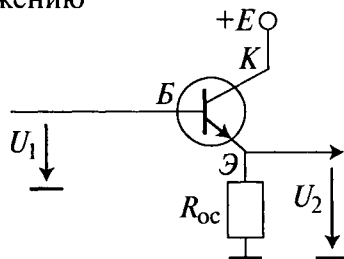
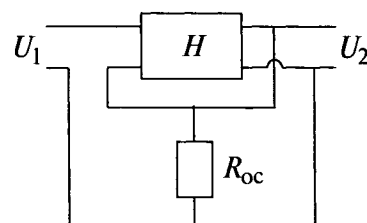
а) Параллельная ОС по напряжению



б) Последовательная ОС по току



в) Последовательная ОС по напряжению



г) Параллельная ОС по току

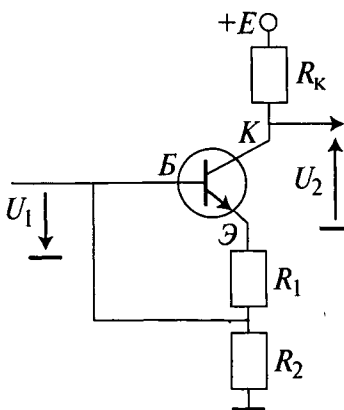
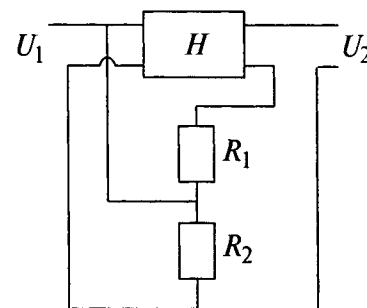


Рис. 6.4

6.1.3. Влияние обратной связи на параметры АЛЭЦ с ОС

Рассмотрим влияние обратной связи на *нестабильность коэффициента передачи АЛЭЦ с ОС*, вызванную влиянием дестабилизирующих факторов, таких как изменение температуры, питающих напряжений, старение компонентов схемы и др.

Нестабильность коэффициента передачи определяется его относительным изменением, т.е. $\Delta H_{\text{оос}}/H_{\text{оос}}$.

1. При использовании ООС продифференцируем (6.3) по H :

$$\frac{dH_{\text{оос}}}{dH} = \frac{1 \cdot (1 + hH) - hH}{(1 + hH)^2} = \frac{1}{(1 + hH)^2} \frac{H}{H} = \frac{H_{\text{оос}}}{H} \frac{1}{1 + hH}.$$

Поскольку $1 + hH \gg 1$, то $\frac{dH_{\text{оос}}}{H_{\text{оос}}} \ll \frac{dH}{H}$.

Таким образом, **ООС снижает нестабильность коэффициента передачи АЛЭЦ.**

2. При использовании ПОС продифференцируем (6.2) по H :

$$\frac{dH_{\text{пос}}}{dH} = \frac{1 \cdot (1 - hH) + hH}{(1 - hH)^2} = \frac{1}{(1 - hH)^2} \frac{H}{H} = \frac{H_{\text{пос}}}{H} \frac{1}{1 - hH}.$$

Поскольку $1 - hH < 1$, то $\frac{dH_{\text{пос}}}{H_{\text{пос}}} > \frac{dH}{H}$.

Таким образом, **ПОС увеличивает нестабильность коэффициента передачи АЛЭЦ.**

Рассмотрим теперь влияние ОС на *ширину полосы пропускания АЛЭЦ* на примере полосового звена, для чего представим его состоящим из последовательно соединенных звеньев НЧ-1 и ВЧ-1 с операторными передаточными функциями (ОПФ):

$$H_{\text{н}}(s) = \frac{H_0}{1 + s\tau_{\text{н}}}; \quad H_{\text{в}}(s) = \frac{s\tau_{\text{в}}H_0}{1 + s\tau_{\text{в}}}.$$

Тогда ОПФ АЛЭЦ без ОС: $H(s) = H_H(s)H_B(s)$.

Рассмотрим отдельно влияние ООС на *граничные частоты* звеньев НЧ-1 и ВЧ-1.

Для звена НЧ-1:

$$\begin{aligned} H_{\text{н оос}}(s) &= \frac{H_H(s)}{1 + h H_H(s)} = \frac{\frac{H_0}{1 + s \tau_H}}{1 + h \frac{H_0}{1 + s \tau_H}} = \\ &= \frac{\frac{H_0}{1 + h H_0}}{1 + s \frac{\tau_H}{1 + h H_0}} = \frac{H_{\text{оос}}}{1 + s \tau_{\text{н оос}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau_{\text{н оос}} = \frac{\tau_H}{1 + h H_0} < \tau_H$, а так как $\tau_H = \frac{1}{\omega_H}$,

то $\omega_{\text{н оос}} > \omega_H$.

Таким образом, **ООС увеличивает граничную частоту звена НЧ-1**, т.е. увеличивает верхнюю граничную частоту полосового звена.

Для звена ВЧ-1:

$$\begin{aligned} H_{\text{в оос}}(s) &= \frac{H_B(s)}{1 + h H_B(s)} = \frac{\frac{s \tau_B H_0}{1 + s \tau_B}}{1 + h \frac{s \tau_B H_0}{1 + s \tau_B}} = \frac{s \tau_B H_0}{1 + s \tau_B (1 + h H_0)} = \\ &= \frac{s \tau_B (1 + h H_0) \frac{H_0}{1 + h H_0}}{1 + s \tau_B (1 + h H_0)} = \frac{s \tau_{\text{в оос}} H_{\text{оос}}}{1 + s \tau_{\text{в оос}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau_{\text{в оос}} = \tau_B (1 + h H_0) > \tau_B$, и так как

$\tau_B = \frac{1}{\omega_B}$, то $\omega_{\text{в оос}} < \omega_B$.

Таким образом, **ООС** уменьшает граничную частоту звена **ВЧ-1**, т.е. снижает нижнюю граничную частоту полосового звена.

Увеличение верхней и снижение нижней граничных частот полосы пропускания полосового звена (**АЛЭЦ**) свидетельствует о ее **расширении под влиянием ООС**. Расширение полосы пропускания уменьшает частотные искажения сигналов (для безыскаженной передачи необходимо иметь бесконечную полосу пропускания), хотя при этом согласно (6.3) снижается коэффициент передачи.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что **ПОС** сужает ширину полосы пропускания **АЛЭЦ**, что вносит дополнительные искажения в передаваемые сигналы за счет ограничения ширины их спектра.

Пример. Пусть задана ОПФ активного звена **НЧ-1**:

$H(s) = \frac{3}{1+2s}$, т.е. $H(0) = 3$; $\tau_n = 2$ с; $\omega_n = \frac{1}{\tau_n} = 0,5$ рад/с
и цепь обратной связи: а) $h_{оос} = 1$; б) $h_{пос} = 0,1$.

Требуется сравнить графики АЧХ звена **НЧ-1** без ОС и с ОС.

Для **ООС**:

$$H_{оос} = \frac{H}{1+hH} = \frac{\frac{3}{1+2s}}{1+1 \cdot \frac{3}{1+2s}} = \frac{0,75}{1+0,5s},$$

т.е. $H_{оос}(0) = 0,75$ и $\tau_{н оос} = 0,5$ с; $\omega_{н оос} = \frac{1}{0,5} = 2$ рад/с.

Для **ПОС**:

$$H_{пос} = \frac{H}{1-hH} = \frac{\frac{3}{1+2s}}{1-0,1 \cdot \frac{3}{1+2s}} = \frac{4,3}{1+2,9s},$$

т.е. $H_{пос}(0) = 4,3$ и $\tau_{н пос} = 2,9$ с; $\omega_{н пос} = \frac{1}{2,9} = 0,35$ рад/с.

Построим графики $H(\omega)$, $H_{\text{оос}}(\omega)$ и $H_{\text{пос}}(\omega)$ звена НЧ-1 (рис. 6.5).

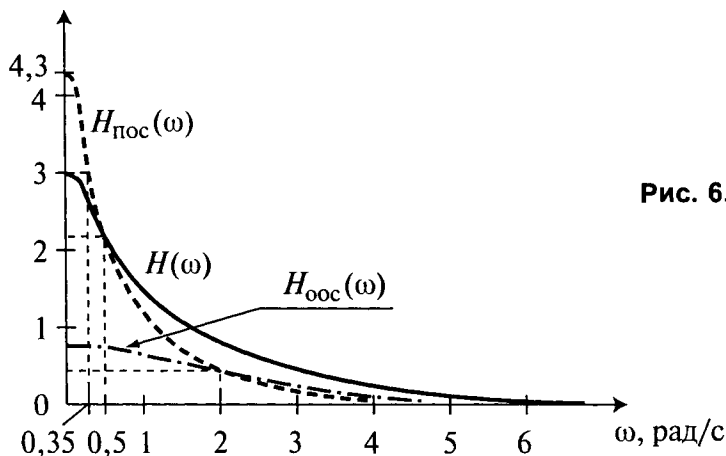


Рис. 6.5

Сравнение АЧХ активного звена НЧ-1 наглядно демонстрирует влияние вида обратной связи на параметры звена: $H(0)$ и $\omega_{\text{н}}$.

6.2. Устойчивость активной цепи с внешней обратной связью

6.2.1. Критерии устойчивости Михайлова и Гурвица

Устойчивость активной электрической цепи — это способность возвращаться в исходное состояние равновесия (стационарное состояние) после окончания какого-либо воздействия.

Пассивные ЭЦ всегда устойчивы (никогда не самовозбуждаются), а активные могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, а также могут находиться на границе устойчивости.

Для оценки устойчивости активной ЭЦ используются критерии (условия), определяющие требуемые соотношения между коэффициентами ОПФ порядка n этой цепи:

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{M(s)}{N(s)}, \quad m \leq n. \quad (6.4)$$

Уравнение $N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0 = 0$ называется характеристическим, так как его корни (см. 4.1) определяют свободную составляющую отклика, равную согласно (4.3)

$$v_{\text{св}} = \sum_{i=1}^n A_i \exp(s_i t) = \sum_{i=1}^n A_i \exp(\sigma_i t) \exp(j\omega_i t),$$

где $s_i = \sigma_i + j\omega_i$.

Таким образом, отклик цепи в общем случае является суммой n колебательных процессов, каждый с частотой ω_i и амплитудой, изменяющейся по экспоненте $\exp(\sigma_i t)$.

При этом i -й процесс будет:

- апериодическим, если $\omega_i = 0$;
- нарастающим, если $\sigma_i > 0$;
- незатухающим, если $\sigma_i = 0$;
- затухающим, если $\sigma_i < 0$.

Затухающие процессы (апериодические или колебательные) характеризуются корнями полинома $N(s)$, расположенными в левой полуплоскости комплексной плоскости (так как $\sigma_i < 0$).

Нарастающие процессы (апериодические или колебательные) характеризуются корнями полинома $N(s)$, расположенными в правой полуплоскости ($\sigma_i > 0$), а *незатухающие процессы* — корнями полинома $N(s)$, расположенными на мнимой оси ($\sigma_i = 0$).

Активная ЭЦ будет устойчивой, если в свободной составляющей ее отклика не содержится нарастающих процессов, т.е. если корни полинома $N(s)$ расположены в левой полуплоскости или на мнимой оси. Если хотя бы один корень полинома $N(s)$ расположен в правой полуплоскости, то активная цепь неустойчива на частоте этого корня, а если он расположен на мнимой оси, то цепь находится на границе устойчивости.

Анализ устойчивости активной цепи требует вычисления всех n корней полинома $N(s)$, что при больших n является достаточно сложной задачей. Поэтому используются упрощенные методы анализа устойчивости активной ЭЦ. Они основаны на определении принадлежности полинома $N(s)$ к полиномам Гурвица, которые всегда имеют корни, расположенные в левой полуплоскости или на мнимой оси.

Свойства полинома Гурвица:

- содержит все n положительных ненулевых коэффициентов b_i ;
- может быть представлен суммой четной (с четными степенями) и нечетной (с нечетными степенями) составляющих, корни которых на мнимой оси чередуются.

Использование этих свойств полинома Гурвица для анализа устойчивости активных цепей называют **критерием Михайлова**.

Пример. Пусть полином $N(s)$ при $n = 4$ имеет все ненулевые и положительные коэффициенты:

$$N(s) = s^4 + s^3 + 26s^2 + 4s + 25. \quad (6.5)$$

Тогда $N(s) = N_{\text{чет}}(s) + N_{\text{нечет}}(s)$, где

$$N_{\text{чет}}(s) = s^4 + 26s^2 + 25; \quad N_{\text{нечет}}(s) = s^3 + 4s.$$

Корни $N_{\text{нечет}}(s)$: $s^3 + 4s = 0$; $s(s^2 + 4) = 0$;

$$s_1' = 0; \quad s_{2,3}' = \pm j \cdot 2.$$

Корни $N_{\text{чет}}(s)$: $s^2 = y$; $y^2 + 26y + 25 = 0$;

$$y_{1,2} = -13 \pm \sqrt{169 - 25} = -13 \pm 12;$$

$$y_1 = -25, \quad s_{1,2} = \pm j \cdot 5; \quad y_2 = -1, \quad s_{3,4} = \pm j.$$

Отметим эти корни на мнимой оси, которую для удобства расположим горизонтально (рис. 6.6).

Таким образом, корни четной и нечетной составляющих полинома $N(s)$ на мнимой оси чередуются

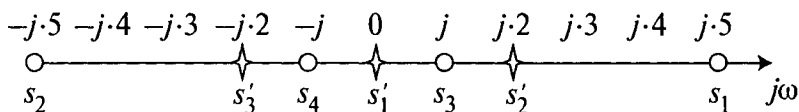


Рис. 6.6

и согласно критерию Михайлова заданный полином $N(s)$ является полиномом Гурвица, т.е. активная цепь с операторной передаточной функцией $H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ устойчива.

Принадлежность полинома $N(s)$ к полиномам Гурвица определяют также с помощью **критерия Гурвица**, который состоит в выполнении трех операций:

1. По заданному полиному $N(s)$ составляют матрицу Гурвица размера $n \times n$, для чего вначале заполняется левая диагональ матрицы коэффициентами $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$, а затем слева и справа от диагонали записываются оставшиеся коэффициенты b_i так, чтобы в каждой строке матрицы номер коэффициентов возрастал слева направо, остальные клетки матрицы заполняются нулями.

Например, при $n = 5$ получим

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

2. Определяют главные диагональные миноры матрицы Гурвица. Например, для матрицы размера 5×5

$$\Delta_1 = b_4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Если все миноры ненулевые и положительные, *делают вывод*, что полином $N(s)$ является полиномом Гурвица и анализируемая активная цепь устойчива.

Пример. Пусть задан полином (6.5): $N(s) = s^4 + s^3 + 26s^2 + 4s + 25$.

Тогда матрица Гурвица примет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 26 & 1 & 1 \\ 0 & 25 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

Главные диагональные миноры:

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 26 \end{vmatrix} = 22 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 26 & 1 \\ 0 & 25 & 4 \end{vmatrix} = 63 > 0.$$

Таким образом, полином $N(s)$ является полиномом Гурвица.

Критерии Михайлова и Гурвица удобны при анализе цепей с заданными параметрами (коэффициентами b_i). Однако они мало пригодны при анализе цепей с изменяющимися параметрами и не дают рекомендаций по преобразованию неустойчивой цепи в устойчивую. От этих недостатков свободен критерий Найквиста.

6.2.2. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий Найквиста используется для анализа устойчивости АЛЭЦ с внешней ОС, т.е. согласно (6.1) анализируется полином $N(s) = 1 \pm hH$, причем величина $hH = H_p(s)$ является передаточной функцией АЛЭЦ с разомкнутой ОС (рис. 6.7):

$$H_p(s) = hH = \frac{v_{oc}}{v_1}. \quad (6.7)$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что АЛЭЦ с внешней ОС будет неустойчивой (склонной к самовозбуждению), если выполняются условия, при которых $H_{oc}(s) = \infty$, т.е. для ПОС при $H_p(s) = 1$, а для ООС при $H_p(s) = -1$.

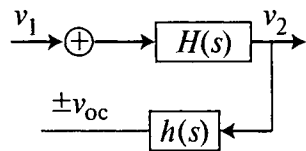


Рис. 6.7

Для анализа функции $H_p(s)$ используют ее частный случай — комплексную передаточную функцию (КПФ):

$$H_p(j\omega) = H_p(\omega) \exp [j\varphi_p(\omega)],$$

где $H_p(\omega)$ и $\varphi_p(\omega)$ — АЧХ и ФЧХ АЛЭЦ с разомкнутой ОС.

Совместное представление АЧХ и ФЧХ АЛЭЦ с разомкнутой ОС на комплексной плоскости называют *годографом* и используют для анализа устойчивости цепей автоматического управления (регулирования). Годографы могут иметь, например, такой вид, как на рис. 6.8.

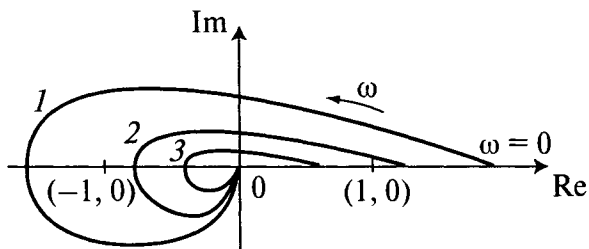


Рис. 6.8

Применительно к годографам функции $H_p(s)$ Найквистом сформулированы **условия (критерии) устойчивости**:

- АЛЭЦ неустойчива, если годограф функции $H_p(s)$ охватывает точки $(-1, 0)$ при ООС (годограф 1) или $(1, 0)$ при ПОС (годографы 1 и 2);
- АЛЭЦ устойчива в противном случае (годограф 3).

По форме годографа видно, что АЛЭЦ с ООС более устойчива, чем АЛЭЦ с ПОС, так как охватить точку $(-1, 0)$ сложнее, чем точку $(1, 0)$.

При анализе устойчивости активных цепей электро-связи более удобен критерий Найквиста в виде требований

к АЧХ и ФЧХ АЛЭЦ с разомкнутой ОС. В диапазоне частот от 0 до ∞ для заданной АЛЭЦ с разомкнутой ОС могут иметься критические частоты $\omega_{кр}$, на которых фазовый сдвиг от входа АЛЭЦ до выхода цепи ОС кратен 0 или 360° , т.е. ФЧХ $\varphi_p(\omega_{кр}) = 0$ или 360° , что соответствует положительной обратной связи при замыкании цепи ОС. При этих критических фазовых сдвигах АЛЭЦ с замкнутой ОС склонна к самовозбуждению, т.е. неустойчива.

«Неохват» годографом точек $(\pm 1, 0)$ на действительной оси равнозначен тому, что для АЧХ АЛЭЦ с разомкнутой ОС на критической частоте $\omega_{кр}$ выполняется условие $H_p(\omega_{кр}) \leq 1$ (критерий Найквиста), что иллюстрируется графиками АЧХ и ФЧХ двух АЛЭЦ с разомкнутой ОС на рис. 6.9.

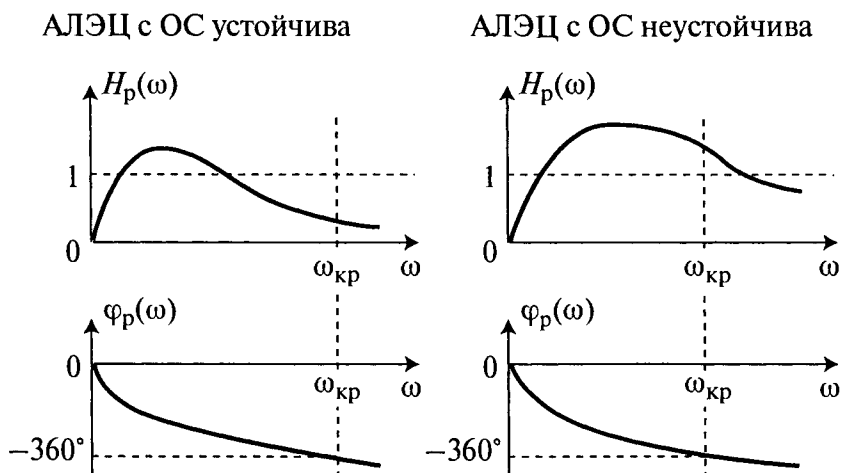


Рис. 6.9

Для простейших АЛЭЦ $\omega_{кр} = 0$ или ∞ , т.е. критический сдвиг фаз в рабочем диапазоне частот отсутствует и АЛЭЦ с ОС всегда устойчива.

Пример. Пусть заданы операторные передаточные функции АЛЭЦ и цепи ОС:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 4}; \quad h(s) = \frac{2}{1 + s}.$$

Требуется определить устойчивость АЛЭЦ с ОС в диапазоне частот от 0 до ∞ по критерию Найквиста.

Определим ОПФ АЛЭЦ с разомкнутой ОС:

$$H_p(s) = h(s)H(s) = \frac{2}{1+s} \frac{s}{s^2 + 2s + 4} = \frac{2s}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}.$$

От ОПФ перейдем к КПФ путем замены s на $j\omega$:

$$H_p(j\omega) = \frac{j\omega \cdot 2}{(4 - 3\omega^2) + j(6\omega - \omega^3)}.$$

Получим выражения для АЧХ и ФЧХ АЛЭЦ с разомкнутой ОС:

$$H_p(\omega) = \frac{2\omega}{\sqrt{(4 - 3\omega^2)^2 + (6\omega - \omega^3)^2}};$$

$$\varphi_p(\omega) = 90^\circ - \operatorname{arctg}\left(\frac{6\omega - \omega^3}{4 - 3\omega^2}\right).$$

Критическая частота $\omega_{кр}$ определяется из условия

$$\varphi_p(\omega_{кр}) = 0^\circ, \text{ что возможно при } 4 - 3\omega_{кр}^2 = 0, \text{ т.е. } \omega_{кр} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

После подстановки значения $\omega_{кр}$ в выражение для АЧХ получим

$$H_p(\omega_{кр}) = \frac{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(4 - 3 \cdot \frac{4}{3}\right)^2 + \left(6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{3}{7} < 1,$$

т.е. АЛЭЦ с такой ОС устойчива.

Если использовать цепь ОС с $h(s) = \frac{5}{1+s}$, то при

$$\omega_{кр} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ получим } H_p(\omega_{кр}) = \frac{15}{14} > 1 \text{ т.е. АЛЭЦ с такой}$$

ОС будет неустойчива.

6.3. Автоколебательные цепи

6.3.1. Виды автогенераторов

Автоколебательные цепи (автогенераторы) — это неустойчивые активные цепи, в которых осуществляется автономное (самопроизвольное, независимое от внешних сигналов) преобразование электрической энергии источника питания в электрическую энергию выходных сигналов (колебаний).

Самопроизвольно колебания в активной цепи могут возникать только при наличии внутренней или внешней положительной обратной связи (ПОС), т.е. в неустойчивых активных цепях, способных к самовозбуждению. Амплитуду нарастающих колебаний в автогенераторе можно ограничить при наличии в его схеме нелинейного элемента.

Параметры выходных колебаний автогенераторов (форма, амплитуда, частота и др.) определяются параметрами схемы и должны быть стабильными как в течение времени одного включения автогенератора, так и при повторных включениях.

Основными элементами автогенераторов являются *активный нелинейный элемент (АНЭ) с ПОС* и *избирательная цепь (ИЦ)* для выделения колебаний требуемой частоты (рис. 6.10).

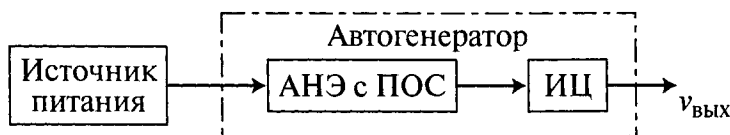


Рис. 6.10

Типы автогенераторов различают:

- *по виду АНЭ:* ламповые, транзисторные, клистронные и др.;
- *по форме выходных колебаний:* генераторы гармонических, импульсных, пилообразных и других колебаний;

- по виду ПОС: с широкополосной внешней ПОС (RC -генераторы), с узкополосной внешней ПОС (LC -генераторы), с внутренней ПОС (негатронные автогенераторы), использующие АНЭ с отрицательным динамическим внутренним сопротивлением на «падающем» участке N - или S -образной вольт-амперной характеристики (ВАХ) (рис. 6.11): туннельные диоды, диоды Ганна, отражающие клистроны, магнетроны и др.

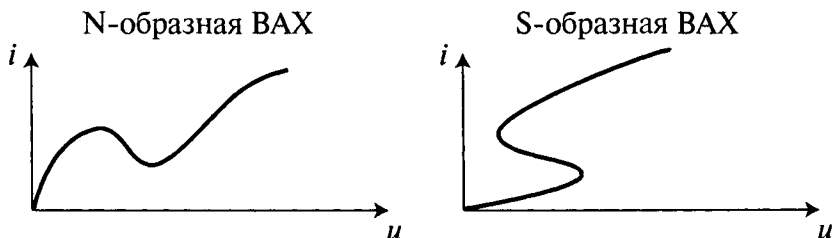


Рис. 6.11

Особенно удобны туннельные диоды с N -образной ВАХ, так как они надежны, имеют малые габариты, массу, потребление энергии и, кроме того, обеспечивают простоту реализации автогенераторов.

Негатронные автогенераторы широко используются в радиолокации, телевидении, многоканальных системах связи и других областях для создания гармонических и релаксационных (разрывных) колебаний.

Автогенераторы с внешней ПОС широко используются, например, для создания гармонических и импульсных колебаний в измерительной технике.

6.3.2. Проблемы анализа автогенераторов

Основные проблемы анализа автогенераторов:

- определение условий самовозбуждения;
- определение условий стационарности режима;
- определение условий устойчивости стационарных состояний.

Рассмотрим пути их решения.

I. Проблема определения условий самовозбуждения для негatronных автогенераторов и для автогенераторов с внешней ПОС решается по-разному.

1. Для *негатронных автогенераторов* при использовании в качестве ИЦ параллельного колебательного контура (ПРК) упрощенная схема имеет вид, приведенный на рис. 6.12.

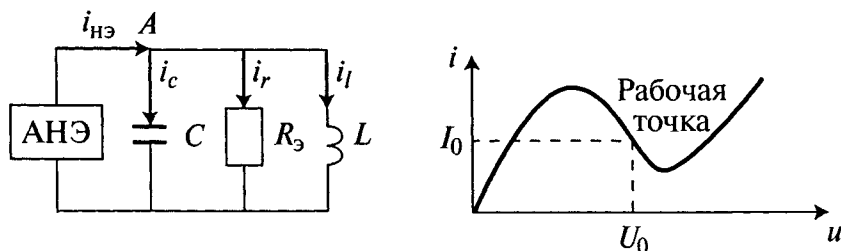


Рис. 6.12

В рабочей точке на середине «падающего» участка ВАХ АНЭ (см. рис. 6.12) динамическая проводимость (крутизна ВАХ) является отрицательной величиной:

$$S_H = \frac{1}{R_d} = \frac{di_{нэ}}{du} < 0,$$

где R_d — динамическое сопротивление АНЭ.

По первому закону Кирхгофа в узле А

$$i_{нэ} = i_c + i_r + i_l, \text{ или } i_{нэ} = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_э} + \frac{1}{L} \int u dt.$$

После дифференцирования по t и деления на C получим

$$\frac{1}{C} \frac{di_{нэ}}{dt} \frac{du}{du} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{CR_э} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u;$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{CR_э} \frac{du}{dt} - \frac{1}{C} \frac{di_{нэ}}{dt} \frac{du}{du} + \frac{1}{LC} u = 0.$$

Обозначим: $S_H = \frac{di_{HЭ}}{du} = \frac{1}{R_d}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $G_э = \frac{1}{R_э}$, тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\sigma \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0,$$

где $2\sigma = \frac{G_э - S_H}{C}$.

Характеристическое уравнение $s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = 0$ имеет корни

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} = -\sigma \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}$ — частота собственных колебаний при $\sigma < \omega_0$.

Согласно классическому методу (см. 4.1) решение этого уравнения

$$u(t) = U_0 \exp(-\sigma t) \sin(\omega_c t). \quad (6.8)$$

Колебания $u(t)$ будут нарастать по экспоненте, если $\sigma < 0$, т.е.

$$\frac{G_э - S_H}{2C} < 0, \text{ или } S_H > G_э. \quad (6.9)$$

Таким образом, условиями самовозбуждения негatronного автогенератора являются:

- отрицательное значение динамической проводимости АНЭ ($S_H < 0$);
- превышение модуля динамической проводимости АНЭ S_H над эквивалентной проводимостью колебательного контура $G_э$. Физически это означает, что поступление энергии в колебательный контур должно превышать потери энергии в нем.

2. Для автогенераторов с внешней ПОС упрощенная схема имеет вид, приведенный на рис. 6.13.



Рис. 6.13

Согласно критерию Найквиста (см. 6.2.2), активная цепь с обратной связью неустойчива, если выполняются два условия:

- для ФЧХ: значение ФЧХ активной цепи с разомкнутой ОС на частоте ω_c кратно 0 или 360° (условие ПОС);
- для АЧХ: значение АЧХ активной цепи с разомкнутой ОС на частоте ω_c превышает 1.

Таким образом, условиями самовозбуждения автогенераторов с внешней ПОС являются условия неустойчивости по Найквисту.

II. Проблема определения условий стационарности режима автогенератора, при котором амплитуда выходного колебания постоянна, также решается по-разному для негатронных автогенераторов и автогенераторов с внешней ПОС.

1. Стационарный режим *негатронных автогенераторов* определяется нелинейностью характеристик АНЭ и требует решения нелинейных дифференциальных уравнений, что является сложной задачей.

С приемлемой для практики точностью может быть использован **квазилинейный метод** академика Ю.Б. Кобзарева, в котором нелинейные уравнения заменены линейными для первых гармоник тока I_1 и напряжения U_1 , а нелинейность АНЭ учитывается нелинейной зависимостью модуля средней крутизны S_{cp} от амплитуды первой гармоники напряжения (рис. 6.14):

$$S_{cp} = \frac{di_{нэ}}{dU_1}; \quad G_э = \frac{I_1}{U_1}.$$

Эквивалентная проводимость $G_э$ характеризует потери энергии автогенератора, а динамическая проводимость S_{cp} — поступление энергии от АНЭ.

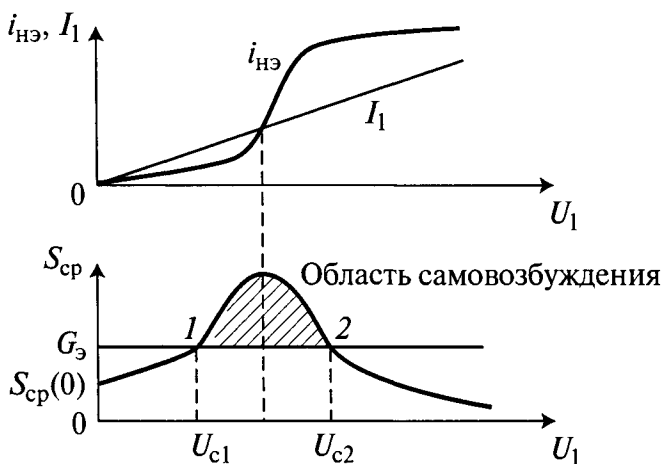


Рис. 6.14

Стационарное состояние автогенератора, или стационарный режим, согласно (6.8), наступает при $\sigma = 0$, т.е. когда

$$S_{cp} = G_3, \quad (6.10)$$

что обеспечивается при равенстве энергии, поступающей от АНЭ, и энергии потерь на резистивных элементах схемы его реализации.

Стационарное состояние автогенератора [равенство (6.10)] наступает в двух точках пересечения кривой S_{cp} и прямой G_3 (точки 1 и 2 на рис. 6.14), одно из этих состояний является устойчивым, а другое — неустойчивым.

2. Стационарный режим автогенераторов с внешней ПОС определяется равенствами:

$$\varphi_p(\omega_1) = \varphi(\omega_1) + \varphi_{oc}(\omega_1) = 0;$$

$$H_p(\omega_1) = H(\omega_1) h(\omega_1) = 1,$$

где ω_1 — частота первой гармоники тока и напряжения автогенератора; $\varphi(\omega_1)$ и $\varphi_{oc}(\omega_1)$ — значения ФЧХ АНЭ и ФЧХ цепи ОС на частоте ω_1 ; $H(\omega_1)$ и $h(\omega_1)$ — значения АЧХ АНЭ и АЧХ цепи ОС на частоте ω_1 .

III. Проблема определения устойчивости стационарного состояния автогенератора решается с помощью условия

$$\frac{dS_{\text{ср}}}{dU_1} < 0. \quad (6.11)$$

Действительно, в точке 1 (см. рис. 6.14) производная $\frac{dS_{\text{ср}}}{dU_1} > 0$, т.е. получим, что:

- при $U_1 = U_{c1} + \Delta U$: $S_{\text{ср}} > G_3$ и колебания нарастают до U_{c2} ;
- при $U_1 = U_{c1} - \Delta U$: $S_{\text{ср}} < G_3$ и колебания затухают до нуля.

Таким образом, **стационарное состояние автогенератора в точке 1 является неустойчивым.**

В точке 2 производная $\frac{dS_{\text{ср}}}{dU_1} < 0$, т.е. получим, что:

- при $U_1 = U_{c2} + \Delta U$: $S_{\text{ср}} < G_3$ и колебания затухают до U_{c2} ;
- при $U_1 = U_{c2} - \Delta U$: $S_{\text{ср}} > G_3$ и колебания нарастают до U_{c2} .

Таким образом, **только в точке 2 стационарное состояние автогенератора является устойчивым.**

6.3.3. Негатронные автогенераторы

При реализации негатронных автогенераторов необходимо обеспечить:

- выбор рабочей точки на «падающем» участке ВАХ АНЭ — *режим по постоянному току*;
- условия самовозбуждения (6.9) — *режим по переменному току*.

Рассмотрим примеры реализации негатронных автогенераторов.

1. Негатронный автогенератор гармонических колебаний на туннельном диоде с N-образной ВАХ (рис. 6.15).

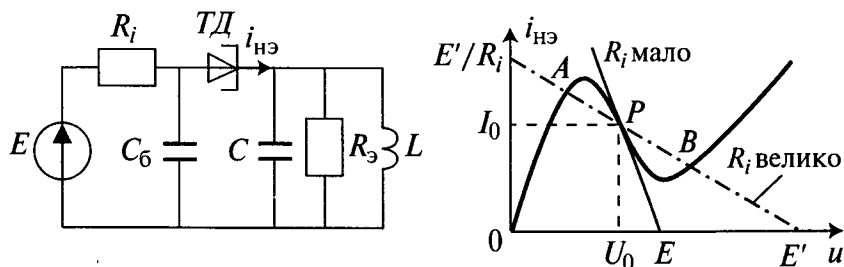


Рис. 6.15

При выборе режима по постоянному току (рабочей точки на ВАХ АНЭ) в зависимости от величины внутреннего сопротивления R_i источника питания E возможны два случая:

1) при малом R_i нагрузочная характеристика $u = E - i_{нз} R_i$ пересекает ВАХ АНЭ в одной рабочей точке P , в которой выполняется условие

$$S_{н} = \frac{di_{нз}}{du} < G_i = \frac{1}{R_i}, \text{ или } \frac{dS_{н}}{du} < 0,$$

что совпадает с условием устойчивости стационарного состояния (6.11).

Следовательно, в устойчивом стационарном состоянии (точка P) крутизна ВАХ АНЭ $S_{н}$ меньше крутизны нагрузочной характеристики G_i ;

2) при большом R_i нагрузочная характеристика пересекает ВАХ АНЭ в трех точках: A , P и B , из которых только точки A и B являются устойчивыми, но они находятся за пределами «падающего» участка, что приведет к прекращению генерации колебаний, возникших в рабочей точке P .

Поэтому в качестве источника питания следует выбирать источник напряжения с малой величиной R_i . Блокировочная емкость C_6 выбирается из условия $\omega C_6 \gg G_i$ и предназначена для шунтирования по переменному току

цепи источника питания, чтобы генерируемые колебания не поступали в источник питания.

При выборе режима по переменному току учитывается условие самовозбуждения (6.9) в рабочей точке P (при U_0), т.е.

$$|S_H(U_0)| > G_3 = \frac{1}{R_3}.$$

Нарастание амплитуды колебаний прекратится при выполнении условия стационарности (6.10), т.е. при

$$S_H(U_0) = G_3.$$

2. Негатронный автогенератор на неоновой лампе (или тиратроне) с S-образной ВАХ АНЭ (рис. 6.16). Такой релаксационный генератор непрерывно генерирует колебания, близкие по форме к пилообразным, за счет использования процесса зажигания и потухания неоновой лампы при изменении напряжения на параллельно подключенном конденсаторе.

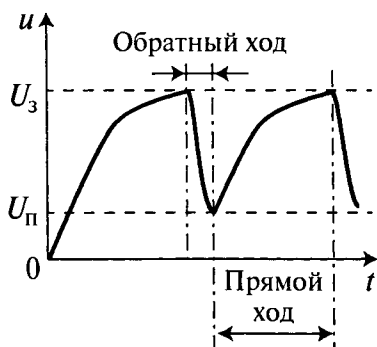
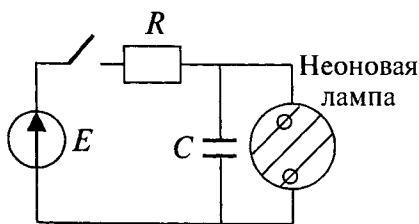


Рис. 6.16

Разность напряжений зажигания U_3 и потухания $U_п$ неоновой лампы определяет «размах пилы», а постоянные времени RC и $R_H C$ — длительность ее «прямого хода» и «обратного хода» соответственно, где R_H — сопротивление «зажженной» неоновой лампы, причем $R_H \ll R$.

6.4. Автогенераторы с внешней обратной связью

6.4.1. Автогенераторы с узкополосной ПОС (*LC*-генераторы)

Автогенераторы с узкополосной ПОС — это *LC*-генераторы с цепью внешней ПОС, образованной с помощью колебательного *LC*-контура. Обобщенная схема *LC*-генераторов приведена на рис. 6.17.

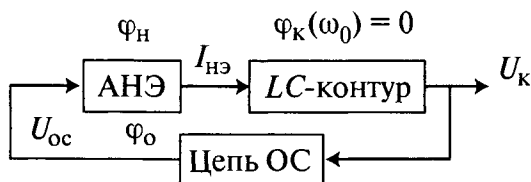


Рис. 6.17

Обычно *LC*-генераторы используются в качестве источников гармонических колебаний в гетеродинах радиоприемных устройств, в возбуждителях радиопередающих устройств, в средствах проводной связи и др.

Поскольку отклик есть напряжение на контуре $\underline{U}_к = \underline{I}_{нэ} R_э$ на частоте резонанса этого контура ω_0 , то для анализа такой цепи используем квазилинейный метод Кобзарева (см. 6.3.2). Если положить, что частота первой гармоники совпадает с резонансной частотой *LC*-контура ω_0 , то согласно квазилинейному методу $\underline{U}_к = \underline{U}_1 = \underline{I}_{нэ} R_э$;

$$H(j\omega_0) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{ос}} = \frac{\underline{I}_{нэ} R_э}{\underline{U}_{ос}}; \quad h(j\omega_0) = \frac{\underline{U}_{ос}}{\underline{U}_1}.$$

Тогда, согласно критерию Найквиста, условия самовозбуждения на частоте ω_0 примут вид:

- для ФЧХ

$$\varphi_н(\omega_0) + \varphi_к(\omega_0) + \varphi_о(\omega_0) = 0; \quad (6.12)$$

- для АЧХ

$$H(\omega_0) h(\omega_0) = \underline{I}_{нэ} R_э / \underline{U}_1 > 1. \quad (6.13)$$

В начальной точке ($U_{oc} = 0$) условие самовозбуждения для АЧХ примет вид

$$\frac{I_{нэ}(0)}{U_1} = S_{cp}(0) > \frac{1}{R_3} = G_3 = \text{const.} \quad (6.14)$$

Условие стационарности состояния LC-генератора:

$$S_{cp} = G_3.$$

Рассмотрим влияние положения рабочей точки на ВАХ АНЭ и параметра цепи ОС G_3 на режим самовозбуждения LC-генератора.

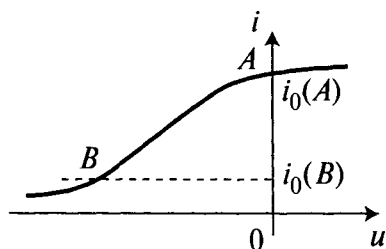


Рис. 6.18

Пусть ВАХ АНЭ (анодно-сеточная характеристика радиолампы) имеет вид, приведенный на рис. 6.18.

В зависимости от положения рабочей точки на ВАХ АНЭ (A или B) получим два вида колебательных характеристик (рис. 6.19).

При выборе на ВАХ АНЭ рабочей точки A уже при $U_{oc} = 0$ выполняется условие самовозбуждения $S_{cp}(0) > G_3$

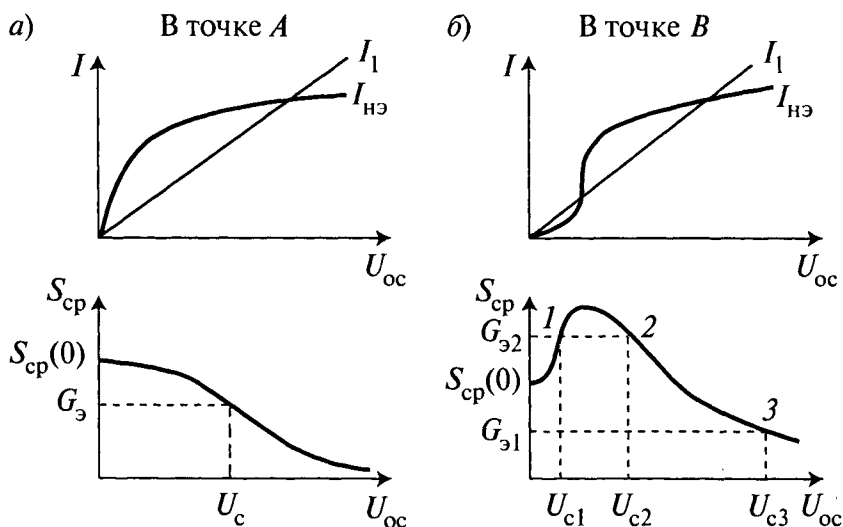


Рис. 6.19

и колебания возникают самопроизвольно из тепловых шумов и постепенно (мягко) нарастают до устойчивого стационарного состояния U_c , которое определяется равенством S_{cp} и G_3 . Такой режим самовозбуждения называют *мягким*.

При выборе на ВАХ АНЭ рабочей точки B в зависимости от величины G_3 возможны два случая:

- при $G_{31} < S_{cp}(0)$ колебания возникают самопроизвольно и (как в предыдущем случае) устанавливается устойчивый стационарный режим U_{c3} ;
- при $G_{32} > S_{cp}(0)$ колебания самопроизвольно возникнуть не могут (условие самовозбуждения не выполняется), для их возникновения необходимо внешнее воздействие с амплитудой $U_B > U_{c1}$, что вызовет скачкообразное (*жесткое*) установление устойчивого стационарного режима U_{c2} .

Переход из мягкого режима (точка A) в жесткий (точка B) и наоборот осуществляется путем изменения напряжения смещения АНЭ с помощью цепи автоматического смещения («гридлика») или принудительно с помощью *потенциометра*. Автоматическое смещение позволяет из мягкого режима после возникновения колебаний перейти в жесткий режим, в котором токопотребление меньше: $I_0(B) < I_0(A)$, что используется, например, в автогенераторах на мощных радиолампах.

Среди практических схем LC -генераторов наибольшее распространение получили транзисторные схемы с трансформаторной ПОС и «трехточечные».

Схема LC -генератора с трансформаторной ПОС приведена на рис. 6.20.

Условие для ФЧХ выполняется: $\varphi_n(\omega_0) + \varphi_o(\omega_0) = 0$ или 2π , так как фазовый сдвиг усилителя $\varphi_n(\omega_0) = \pi$ (свойство транзисторного каскада с общим эмиттером), а фазовый сдвиг цепи ОС

$\varphi_o(\omega_0) = \pi$, что обеспечивается встречным включением обмоток трансформатора.

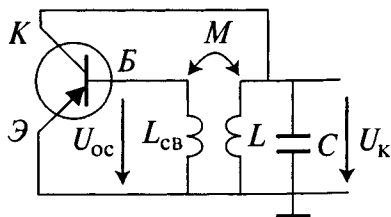


Рис. 6.20

По условию самовозбуждения для АЧХ (6.13): $H(\omega_0) h(\omega_0) = I_{нэ} R_э / U_1 > 1$.

Поскольку $h(\omega_0) = M/L = k_{св}$, где $k_{св}$ — коэффициент связи, то условие для АЧХ: $\frac{I_{нэ}(0)}{U_1} = S_{ср}(0) > \frac{1}{R_э k_{св}}$.

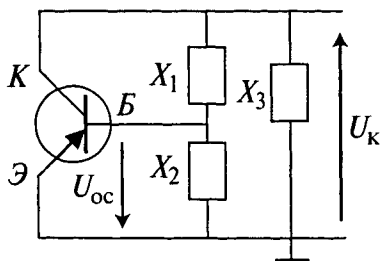


Рис. 6.21

Схема «трехточечного» LC-генератора приведена на рис. 6.21. Здесь

$$h(\omega_0) = \frac{-U_{ос}}{U_к} = \frac{X_2}{X_1 + X_2}.$$

Поскольку $U_{ос}$ и $U_к$ противофазные (свойство транзистора), то для того, чтобы

выполнялось условие (6.12), для реактивных сопротивлений X_1 , X_2 и X_3 должны выполняться «правила трехточки»:

1-е правило: X_1 и X_2 должны быть разного характера (знака) и, кроме того, модуль X_1 должен превышать модуль X_2 ;

2-е правило: X_2 и X_3 должны быть одинакового характера, так как при резонансе выполняется равенство $X_1 = X_2 + X_3$.

Эти правила выполняются для двух вариантов схем (рис. 6.22).

Второй вариант «трехточки» (см. рис. 6.22, б) предпочтительнее первого (см. рис. 6.22, а), так как он использует только одну индуктивность.

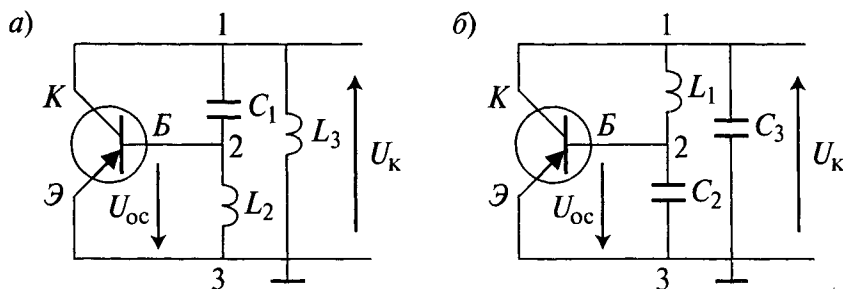


Рис. 6.22

6.4.2. Автогенераторы с широкополосной ПОС (RC-генераторы)

Для получения колебаний очень низких частот в LC -генераторах потребовались бы достаточно большие значения величин L и C , которые иногда трудно реализовать. Поэтому нашли применение автогенераторы с широкополосной внешней цепью ПОС, состоящей из нескольких фазосдвигающих RC -звеньев. Такие автогенераторы называют ***RC-генераторами***.

В RC -генераторах совокупность RC -звеньев создает необходимые фазовые сдвиги для выполнения условия (6.12) на заданной частоте генерации ω_r .

Для пояснения принципа работы RC -генераторов рассмотрим две наиболее распространенные схемы: на инвертирующем и неинвертирующем усилителе.

RC-генератор на инвертирующем усилителе. Для инвертирующего усилителя его фазовый сдвиг равен π , поэтому фазовый сдвиг цепи ОС, согласно условию самовозбуждения для ФЧХ, на частоте генерации ω_r также должен быть равен $\pm\pi$.

Поскольку одно RC -звено обеспечивает фазовый сдвиг от 0 до $\pi/2$, то цепочка из трех RC -звеньев (рис. 6.23) обеспечивает фазовый сдвиг от 0 до $3\pi/2$ на частотах от 0 до ∞ . Изменением величины резисторов R_1, R_2, R_3 или емкостей C_1, C_2, C_3 изменяется ФЧХ цепи ОС так, что обеспечивается необходимый фазовый сдвиг цепи ОС на π на требуемой частоте генерации ω_r . По условию самовозбуждения для АЧХ (6.13): $H(\omega_r) > 1/h(\omega_r)$.

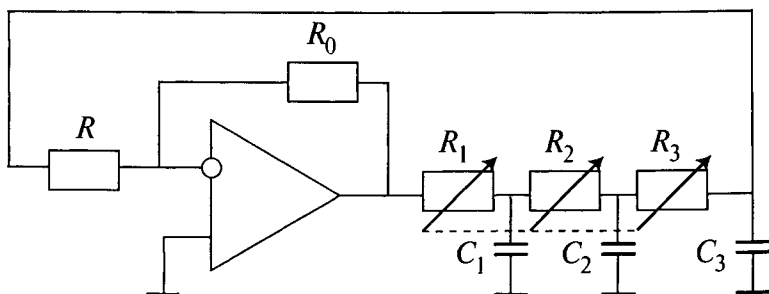


Рис. 6.23

ФЧХ цепи ОС такой схемы приведена на рис. 6.24.

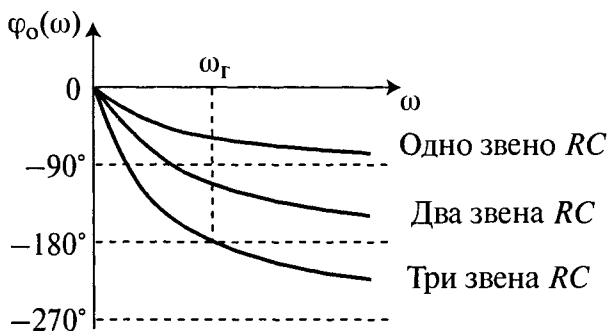


Рис. 6.24

Анализ этой схемы по методу контурных токов показывает, что для обеспечения работы в пределах линейного участка ВАХ АНЭ для генерации гармонических колебаний требуется иметь $H(\omega_r) = 29$. Отклонение $H(\omega_r)$ от величины 29 приводит к искажению формы гармонических колебаний и генерации колебаний с широким спектром.

RC-генератор на неинвертирующем усилителе. Для неинвертирующего усилителя его фазовый сдвиг равен 0, поэтому фазовый сдвиг цепи ОС, согласно условию самовозбуждения для ФЧХ, на частоте генерации ω_r также должен быть равен 0.

Такой фазовый сдвиг обеспечивает полосовое звено типа RC, состоящее из звена НЧ-1 и звена ВЧ-1 (мост Вина) (рис. 6.25).

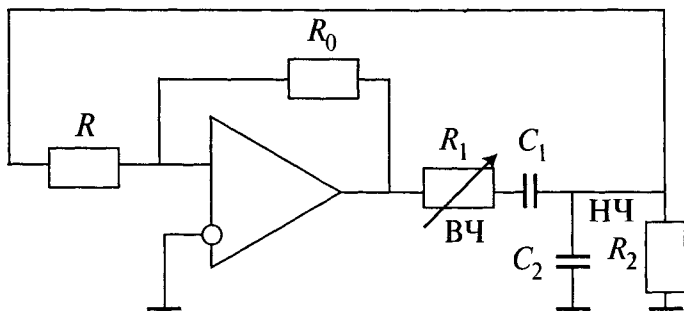


Рис. 6.25

ФЧХ цепи ОС такой схемы приведена на рис. 6.26.

Здесь $\omega_r = \frac{1}{RC}$.

При условии $R_1 = R_2 = R$ и $C_1 = C_2 = C$ величина $h(\omega_r) = 1/3$. Тогда, согласно условию самовозбуждения для АЧХ (6.13), получим, что $H(\omega_r) > 3$. В стационарном режиме $H(\omega_r) = 3$, и отклонение от этой величины вызывает искажение

формы генерируемых гармонических колебаний за счет расширения спектра генерируемых частот.

RC-генераторы обеспечивают более широкое перекрытие диапазона генерируемых частот, чем LC-генераторы, и поэтому широко используются в измерительной технике.

Для стабилизации коэффициента усиления усилителя применяют цепи отрицательной обратной связи и терморезисторы, изменяющие смещение на базу транзистора при изменении температуры окружающей среды.

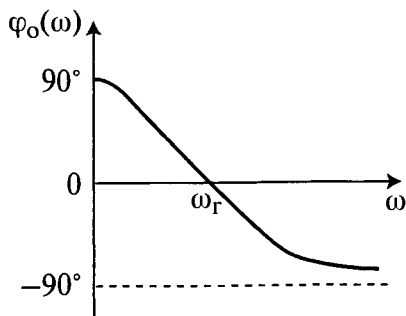


Рис. 6.26

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Виды обратной связи и их влияние на нестабильность коэффициента передачи и на ширину полосы пропускания АЛЭЦ.
2. Сущность критериев устойчивости Михайлова, Гурвица и Найквиста.
3. Условия самовозбуждения, стационарности состояния и устойчивости стационарного состояния неавтогенных автогенераторов и автогенераторов с внешней ОС.
4. Условия и режимы самовозбуждения LC-генераторов.
5. Правила «трехточки».
6. Условия самовозбуждения RC-генераторов.

Тема 7. АНАЛОГОВЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ

7.1. Общая характеристика аналоговых электрических фильтров

7.1.1. Назначение и виды электрических фильтров

Электрические фильтры (ЭФ) — это линейные четырехполосники, обладающие частотно-избирательными свойствами.

Они предназначены для выделения из электрического колебания с широким спектром частотных составляющих, попадающих в заданную полосу частот, называемую *полосой пропускания* (ПП), и подавления частотных составляющих, попадающих в другую заданную полосу частот, называемую *полосой задерживания* (ПЗ). Между ПП и ПЗ в реальных ЭФ находится *полоса расфилтровки* (ПР). Взаимное расположение ПП, ПЗ и ПР определяют частотные свойства ЭФ, при этом различают **четыре вида электрических фильтров**:

- фильтры нижних частот (ФНЧ) — ПП в области низких частот;
- фильтры верхних частот (ФВЧ) — ПП в области высоких частот;
- полосовые фильтры (ПФ) — ПП в области средних частот;
- режекторные фильтры (РФ) — ПЗ в области средних частот.

Для идеальных ЭФ (ПР отсутствует) графики АЧХ этих видов ЭФ имеют вид, приведенный на рис. 7.1.

Основные параметры АЧХ фильтров:

- ω_c — частота среза, определяющая границы ПП;
- H_{\max} — максимальное значение АЧХ (для пассивных ЭФ $H_{\max} = 1$).

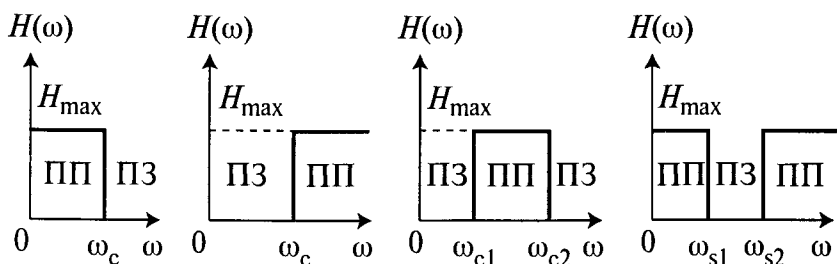


Рис. 7.1

При анализе полагают, что ЭФ находятся в режиме односторонней или двусторонней нагрузки (см. 6.4), причем внутреннее сопротивление источника воздействия Z_i и сопротивления нагрузки Z_H резистивные и равны друг другу, т.е. $R_i = R_H$.

Обычно требования к частотным свойствам ЭФ задаются в виде требований к *частотной характеристике затухания* (ЧХЗ), которая характеризует частотную зависимость рабочего затухания и связана с АЧХ соотношением

$$A(\omega) = -20 \lg H(\omega), \text{ дБ.} \quad (7.1)$$

Требования к «качеству фильтрации» задаются в виде *графиков допусков* (коридоров) для ЧХЗ, которые для различных видов ЭФ приведены на рис. 7.2.

Параметры, задающие «качество фильтрации»:

- A_{\min} (дБ) — минимально допустимое затухание в ПЗ: $A(\omega) > A_{\min}$;
- A_{\max} (дБ) — максимально допустимое затухание в ПП (неравномерность ЧХЗ в ПП): $A(\omega) < A_{\max}$;
- ω_{c1}, ω_{c2} — частоты среза ПП;
- ω_{s1}, ω_{s2} — частоты среза ПЗ.

Реальные ЭФ могут иметь произвольную ЧХЗ, но она обязательно должна вписываться в пределы заданного графика допусков (заданного «качества фильтрации»). При этом возможно произвольное расположение ЧХЗ по оси ординат, и для ее привязки к нулевому уровню

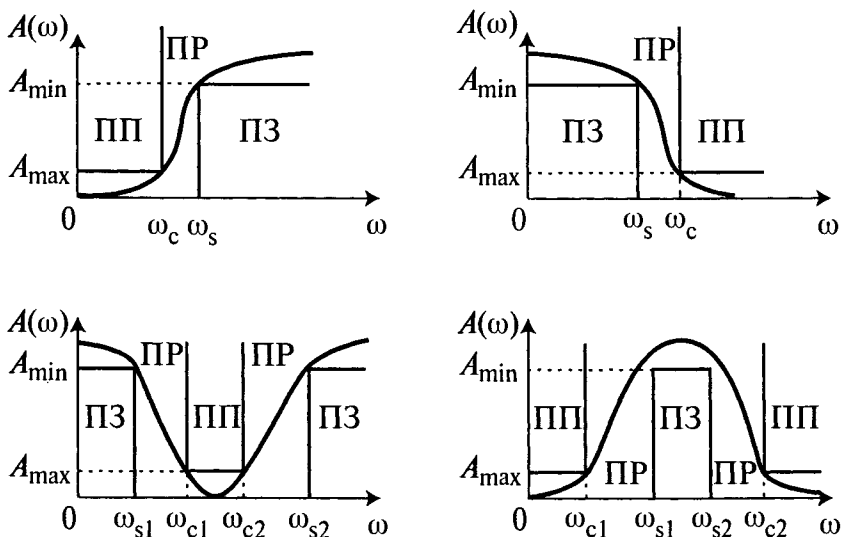


Рис. 7.2

определяют наименьшее значение затухания в ПП ($A_{\min \min} \geq 0$) и вводят *нормирующий коэффициент* K :

$$K = 10^{0,05 A_{\min \min}}. \quad (7.2)$$

При синтезе (проектировании) ЭФ для удобства проектирования значения переменных частот и параметров также нормируют по частоте и сопротивлению:

$$S = \frac{s}{\omega_c}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}; \quad z(S) = \frac{Z(s)}{R_0}; \quad y(S) = Y(s) R_0, \quad (7.3)$$

где в качестве нормирующей частоты используют частоту среза ПП ω_c , а в качестве нормирующего сопротивления — сопротивление нагрузки R_0 .

ФНЧ с нормированными значениями частоты среза ПП и сопротивления нагрузки $\Omega_c = 1$ и $r_H = 1$ называют **ФНЧ-прототипом**, так как его используют для начала синтеза произвольного ЭФ.

Нормированные значения параметров элементов произвольного ЭФ определяются выражениями:

$$r = \frac{R}{R_0} = \frac{R}{K_r}; \quad l = \frac{\omega_c L}{R_0} = \frac{L}{K_l}; \quad c = \frac{\omega_c C}{1/R_0} = \frac{C}{K_c},$$

где нормирующие коэффициенты

$$K_r = R_0; \quad K_l = \frac{R_0}{\omega_c}; \quad K_c = \frac{1}{\omega_c R_0} = \frac{G_0}{\omega_c}. \quad (7.4)$$

При денормировании (переходе к действительным значениям параметров) нормированные параметры (r, l, c) умножаются на соответствующие нормирующие коэффициенты (7.4).

7.1.2. Задача и проблемы синтеза электрических фильтров

Проектирование ЭФ осуществляется на основе синтеза четырехполюсников с заданными свойствами.

Задача синтеза ЭФ, обратная задаче анализа, состоит в определении *структуры схемы* и *параметров ее элементов* по заданным частотным или временным характеристикам ЭФ.

Синтез является более сложной задачей, чем анализ, так как возникают следующие проблемы:

1. **Проблема неоднозначности синтеза**: решение задачи синтеза, в отличие от задачи анализа, не является однозначным, так как одна и та же характеристика может быть реализована несколькими различными схемами. Например, звено НЧ-1 может быть реализовано RC - или LR -цепями, а выбранная схема реализации может иметь множество вариантов параметров, удовлетворяющих заданным требованиям. Постоянная времени звена НЧ-1 $\tau = RC$ (или $\tau = L/R$) имеет одно и то же значение при бесконечном множестве наборов значений R и C (или R и L).

Эта проблема решается следующим образом: выбор отдельных схем по критерию устойчивости к разбросу параметров, по критерию минимума (или отсутствия) индуктивных элементов, наличия реальных элементов и др.

2. Проблема физической реализации ЭФ с заданными характеристиками: решение задачи синтеза возможно, если заданные характеристики удовлетворяют условиям физической реализуемости (УФР), т.е. эти характеристики могут быть реализованы с помощью пассивных элементов и управляемых источников. В зависимости от используемой элементной базы различают синтез реактивных (LC), безындуктивных (RC), беземкостных (LR) пассивных и активных фильтров.

3. Проблема аппроксимации заданных характеристик ЭФ: заданные характеристики обычно представлены в виде таблиц или графиков, например в виде графиков допусков («качества фильтрации»), и поэтому необходима их аппроксимация, т.е. представление этих характеристик с достаточной точностью аналитической функцией, удовлетворяющей УФР.

С учетом перечисленных проблем основными этапами синтеза ЭФ являются:

- аппроксимация заданной характеристики;
- проверка аппроксимирующей функции на соответствии УФР;
- реализация аппроксимирующей функции путем выбора схемы и расчета параметров ее элементов.

Наиболее часто синтез ЭФ осуществляют по операторным входным и передаточным функциям. При синтезе могут использоваться численные методы оптимизации. Этапы аппроксимации, реализации и оптимизации объединяются при структурном синтезе, когда структура ЭФ заранее задана и требуется определить только параметры ее элементов.

7.1.3. Условия физической реализуемости характеристик ЭФ

Любая операторная характеристика (входная или передаточная) может быть представлена дробно-рациональной функцией комплексной переменной $s = \sigma \pm j\omega$ с вещественными коэффициентами [см. (6.4)]:

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{M(s)}{N(s)}, \quad (7.5)$$

где a_i — вещественные положительные, отрицательные или нулевые коэффициенты; b_i — вещественные положительные и ненулевые коэффициенты.

Корни полинома $N(s)$ обозначают p_i , $i = 1 \div n$ и называют **полюсами** функции $H(s)$, так как $H(p_i) = \infty$.

Корни полинома $M(s)$ обозначают z_i , $i = 1 \div m$ и называют **нулями** функции $H(s)$, так как $H(z_i) = 0$.

Тогда функция $H(s)$ может быть представлена своими «нулями» и «полюсами»:

$$H(s) = \frac{a_m}{b_n} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}. \quad (7.6)$$

«Нули» и «полюсы» функции $H(s)$ могут быть вещественными и попарно комплексно-сопряженными.

Физически реализуемая функция $H(s)$ должна удовлетворять *условию устойчивости ЭФ* (см. 6.2). Поэтому **общим условием физической реализуемости (УФР)** для любой функции $H(s)$ является размещение всех ее «полюсов» в левой полуплоскости или на мнимой оси комплексной плоскости, т.е. полином $N(s)$ должен быть полиномом Гурвица.

Если все «полюсы» функции $H(s)$ лежат на мнимой оси, то функция $H(s)$ называется **реактансной**, а соответствующая ей цепь не содержит резисторов, что является идеализацией некоторых пассивных цепей.

«Нули» функции $H(s)$ могут располагаться произвольно:

1. Если все «нули» функции $H(s)$ расположены в левой полуплоскости, то соответствующая ей цепь называется **минимально-фазовой цепью (МФЦ)**, так как фазовый сдвиг такой цепи, как у двухполюсников, не превышает 90° .

2. Если часть «нулей» расположена в левой полуплоскости, а часть — в правой, то полином $M(s)$ может быть представлен в виде произведения полинома

$M_1(s)$ с корнями в левой полуплоскости и полинома $M_2(-s)$ с корнями в правой полуплоскости, т.е. $M(s) = M_1(s)M_2(-s)$. Тогда

$$H(s) = \frac{M_1(s)M_2(-s)}{N(s)} \frac{M_2(s)}{M_2(s)} = H_{\text{мфи}}(s)H_{\text{фк}}(s). \quad (7.7)$$

где $H_{\text{мфи}}(s) = \frac{M_1(s)M_2(s)}{N(s)}$ — операторная передаточная

функция МФЦ; $H_{\text{фк}}(s) = \frac{M_2(-s)}{M_2(s)}$ — операторная

передаточная функция ФК — фазового контура, АЧХ которого равна 1.

Действительно, при $s = j\omega$ получим

$$\frac{M_2(-j\omega)}{M_2(j\omega)} = \frac{M_2(\omega) \exp[-j\varphi(\omega)]}{M_2(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]} = 1 \cdot \exp[-j \cdot 2\varphi(\omega)].$$

Таким образом, произвольная передаточная функция $H(s)$ может быть представлена произведением передаточных функций МФЦ и ФК.

Число «нулей» m обычно меньше или равно числу «полюсов» n , так как в реальных ЭФ всегда имеют место «паразитные» емкости $Z_c = 1/(sC)$, причем $(n - m)$ «нулей» находится в бесконечности.

Для двухполюсников, являющихся МФЦ, число «нулей» и «полюсов» отличается не более чем на 1, причем они могут меняться местами, так как любая входная опе-

раторная функция $Z(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{1}{Y(s)}$ является входной

функцией либо индуктивной ($m = n + 1$), либо емкостной ($m = n - 1$), либо резистивной ($m = n$) цепи.

Данное свойство входных операторных функций двухполюсников (отличие m от n не более чем на 1) есть второе условие их физической реализуемости (УФР-2).

Поскольку степени четной и нечетной составляющих полинома Гурвица (см. 6.2.1) отличаются на 1, а их корни чередуются на мнимой оси, то реактансная входная функция реализуемой МФЦ (двухполюсника) может быть представлена одним из следующих отношений:

$$Z(s) = \frac{N_{\text{нечет}}(s)}{N_{\text{чет}}(s)} = \frac{N(s) - N(-s)}{N(s) + N(-s)}, \quad (7.8)$$

$$Z(s) = \frac{N_{\text{чет}}(s)}{N_{\text{нечет}}(s)} = \frac{N(s) + N(-s)}{N(s) - N(-s)}.$$

Например, используя полином (6.5), получим физически реализуемые реактансные входные функции:

$$Z(s) = \frac{s^4 + 26s^2 + 25}{s^3 + 4s} \quad \text{или} \quad Z(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^4 + 26s^2 + 25}. \quad (7.9)$$

При синтезе ЭФ используется функция $F(\omega) = H^2(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega)$.

7.2. Пассивные лестничные LC-фильтры

7.2.1. Виды пассивных лестничных LC-фильтров и условия фильтрации

Пассивными лестничными LC-фильтрами являются четырехполюсники лестничной структуры с реактивными элементами в продольной и поперечной ветвях. Для таких фильтров операторная (входная или передаточная) функция является реактансной (см. 7.1.3).

К **лестничным LC-фильтрам** относятся:

- Т- и П-образные звенья типа «k» и «m»;
- полиномиальные фильтры Батерворта или Чебышёва;
- инверсные фильтры Чебышёва и фильтры Золотарева — Кауэра.

Два возможных варианта структуры лестничного фильтра приведены на рис. 7.3.

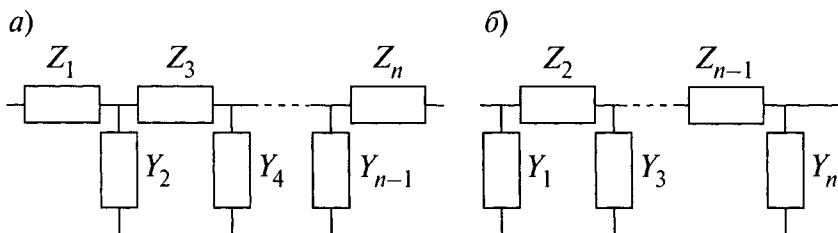


Рис. 7.3

Основными структурными элементами лестничных схем являются Т- и П-образные звенья (симметричные четырехполюсники), свойства которых определяются соответствующей матрицей A -параметров.

Согласно (5.24) для симметричных четырехполюсников

$$A_{11} = A_{22} = \operatorname{ch}(A_c + jB_c) = \operatorname{ch}A_c \cos B_c + j \operatorname{sh}A_c \sin B_c.$$

где A_c и B_c — собственное (характеристическое) затухание и фазовая постоянная симметричного ненагруженного четырехполюсника.

Поскольку в полосе пропускания реактивного фильтра $A_c(\omega) = 0$, т.е. параметры $A_{11} = A_{22} = \cos B_c$ (так как $\operatorname{ch}0 = 1$ и $\operatorname{sh}0 = 0$), то условием существования ПП (условием фильтрации) Т- и П-образных звеньев является условие для $\cos B_c$:

$$-1 \leq A_{11} \leq 1. \quad (7.10)$$

Для Т- и П-образных звеньев при заданных обозначениях элементов (рис. 7.4) получим одно и то же выражение

$$A_{11} = A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 + \frac{jX_1}{2jX_2} = 1 + \frac{X_1}{2X_2}. \quad (7.11)$$

Тогда условие (7.10) примет вид $-1 \leq \frac{X_1}{4X_2} \leq 0$.

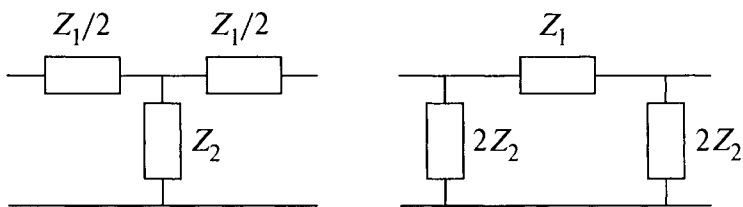


Рис. 7.4

Из этого условия следует, что:

- частоты среза ПП ω_{c1} и ω_{c2} определяются из граничных равенств:

$$X_1(\omega_{c1}) = 0 \quad \text{и} \quad X_1(\omega_{c2}) = -4X_2(\omega_{c2}); \quad (7.12)$$

- ПП существует, если между ω_{c1} и ω_{c2} выполняются:
необходимое условие: X_1 и X_2 имеют разный характер;
достаточное условие:

$$|X_1| < |-4X_2|. \quad (7.13)$$

Анализ выражений (7.10) и (5.24) показывает, что в *полосе пропускания* $A_c(\omega) = 0$, а в *полосе задерживания* ЧХЗ Т- и П-образных звеньев

$$A_c(\omega) = \text{Arch} |A_{11}|. \quad (7.14)$$

После подстановки в (5.18) значений A_{12} и A_{21} получим следующие выражения для характеристических сопротивлений Т- и П-образных звеньев:

$$Z_{с.т} = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}; \quad Z_{с.п} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}}}. \quad (7.15)$$

Таким образом, алгоритм по определению вида звена фильтра заданной структуры будет следующим:

- 1) качественно построить графики функций $X_1(\omega)$, $4X_2(\omega)$ и $-4X_2(\omega)$;
- 2) определить частоты среза согласно (7.12);
- 3) определить положение ПП согласно (7.13);
- 4) построить график ЧХЗ и определить по нему вид ЭФ.

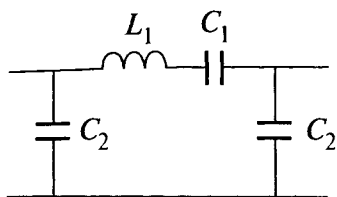


Рис. 7.5

Пример. Определить вид звена ЭФ, структура которого приведена на рис. 7.5.

Согласно алгоритму действий получим график ЧХЗ (рис. 7.6), по виду которой определяем, что это полосовой фильтр (см. рис. 7.2).

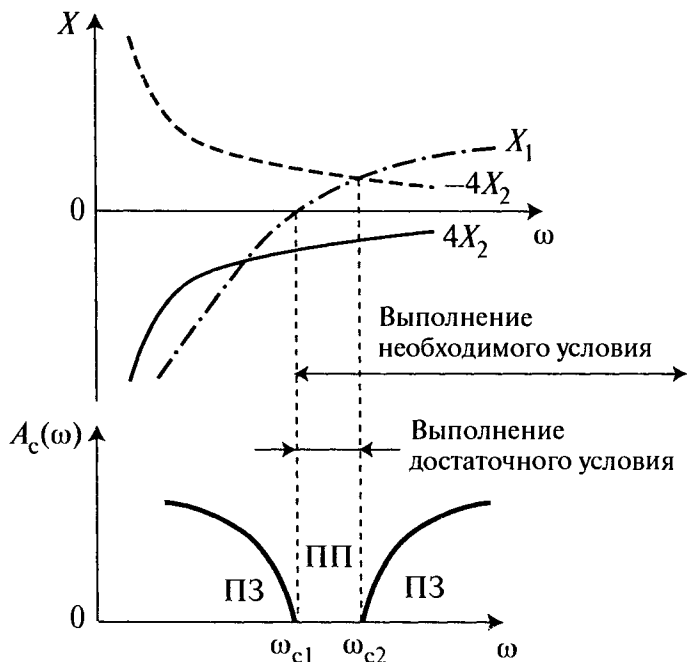


Рис. 7.6

7.2.2. Пассивные лестничные фильтры типа «k»

Пассивные лестничные фильтры с дуальными реактивными элементами Z_1 и Z_2 , для которых величина $\sqrt{Z_1 Z_2} = k = \text{const}$, т.е. от частоты не зависит, называются *фильтрами типа «k»*.

Например, при $Z_1 = j\omega L_1$ и $Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$

$$k = \sqrt{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_2}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \rho,$$

т.е. от частоты не зависит.

При этом частота среза, согласно (7.12), $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}}$.

Таким образом, все четыре вида ЭФ типа «к» могут быть получены при следующих дуальных наборах элементов продольной и поперечной ветвей (рис. 7.7).

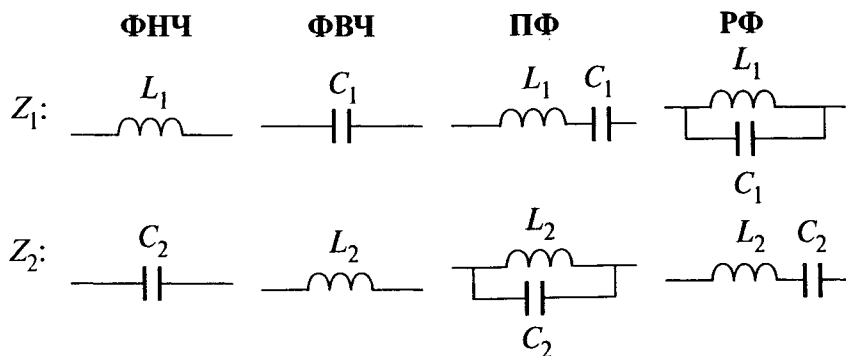


Рис. 7.7

Рассмотрим особенности фильтров типа «к» на примере ФНЧ, причем для удобства введем понятие *нормированной частоты* $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$.

Тогда, согласно (7.11)–(7.14), для ФНЧ типа «к» $\left(\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} \right)$ получим: $A_{11} = 1 - 2\Omega^2$;

в ПП: $A_c = 0$; $B_c = \arccos(1 - 2\Omega^2)$;

в ПЗ: $A_c = \text{Arch}|1 - 2\Omega^2|$; $B_c = \pi$.

Согласно (7.15):

$$Z_{с.т} = \rho \sqrt{1 - \Omega^2}; \quad Z_{с.п} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \Omega^2}}. \quad (7.16)$$

По полученным выражениям построим графики (рис. 7.8).

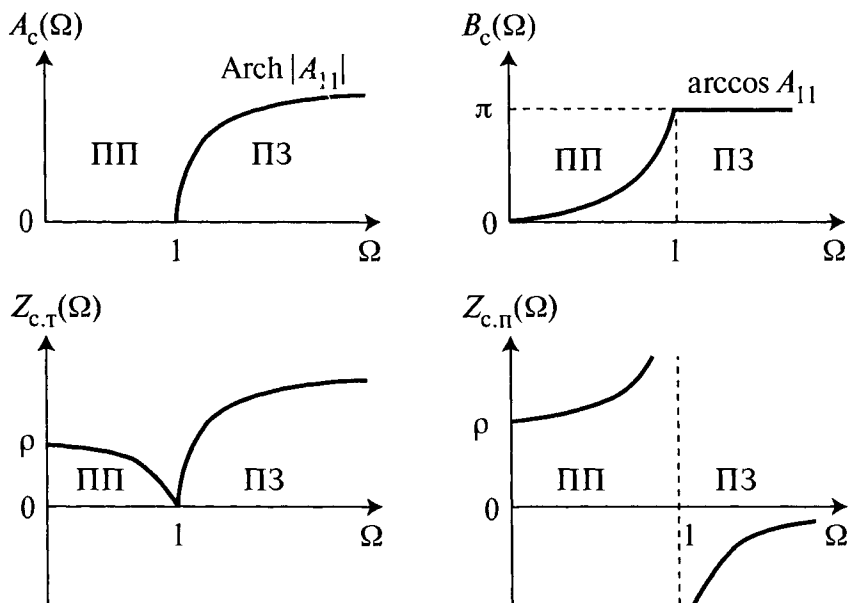


Рис. 7.8

Анализ графиков на рис. 7.8 показывает, что $Z_{c,r}$ и $Z_{c,i}$:

- в ПП имеют активный характер и изменяются неравномерно, что затрудняет согласование в ПП;
- в ПЗ имеют реактивный характер.

Фильтры типа « k » просты и обеспечивают монотонный рост затухания в ПЗ. Однако вблизи частот среза они имеют малую избирательность, для повышения которой приходится увеличивать число звеньев фильтра.

7.2.3. Пассивные лестничные фильтры типа « m »

Стремление устранить недостатки фильтров типа « k » привело к появлению **фильтров типа « m »**, которые содержат либо параллельный колебательный контур в продольной ветви (XX на резонансной частоте),

либо последовательный колебательный контур в поперечной ветви (КЗ на резонансной частоте), т.е. имеют «полюс» ЧХЗ («нуль» АЧХ) на резонансной частоте этих контуров. Это повышает избирательность (крутизну ЧХЗ) вблизи частоты среза, если частота среза выбрана близко к частоте резонанса контуров.

Переход от фильтра типа « k » к фильтру типа « m » осуществляется путем модификации полувеньев вида a и b . При этом различают две модификации:

- последовательно-производная для полувенья a (рис. 7.9, a);
- параллельно-производная для полувенья b (рис. 7.9, b).

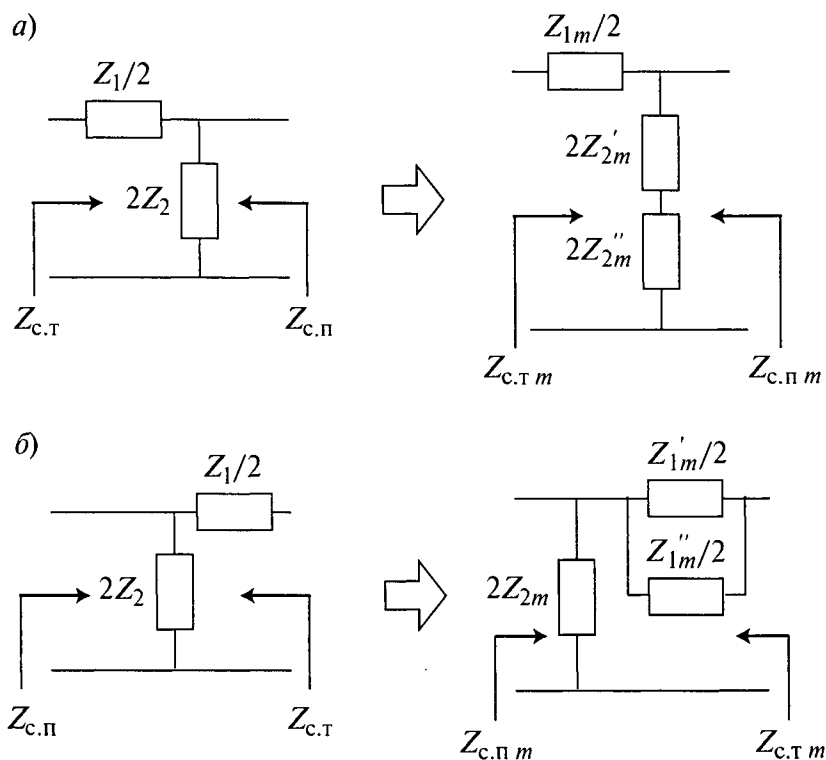


Рис. 7.9

Рассмотрим условия, алгоритм и основные соотношения для этих модификаций.

Последовательно-
производная
модификация
полузвена a

Параллельно-
производная
модификация
полузвена b

Условия модификации — постоянство входных сопротивлений:

$$Z_{c.т} = Z_{c.т} m$$

$$Z_{c.п} = Z_{c.п} m$$

Алгоритм модификации:

1. Выбор одного элемента с помощью параметра модификации $0 < m < 1$:

$$Z_{1m} = m Z_1$$

$$Z_{2m} = Z_2 / m$$

2. Расчет по (7.15) сопротивления другого элемента с учетом условия модификации:

$$\begin{aligned} Z_{2m} &= Z'_{2m} + Z''_{2m} = \\ &= \frac{Z_2}{m} + Z_1 \frac{1-m^2}{4m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{1m} &= Y'_{1m} + Y''_{1m} = \\ &= \frac{1}{m Z_1} + \frac{1}{Z_2} \frac{1-m^2}{4m} \end{aligned}$$

Тогда:

$$Z'_{2m} = \frac{Z_2}{m};$$

$$Z'_{1m} = m Z_1;$$

$$Z''_{2m} = Z_1 \frac{1-m^2}{4m}.$$

$$Z''_{1m} = Z_2 \frac{4m}{1-m^2}.$$

Поскольку Z_1 и Z_2 в ЭФ типа « k » являются дуальными, т.е. имеют противоположный характер, то при $m > 0$ противоположный характер имеют также Z'_{2m} и Z''_{2m} , Z'_{1m} и Z''_{1m} , т.е. они образуют колебательный контур.

3. Расчет по (7.15) выходных характеристических сопротивлений:

$$Z_{c.п m} = Z_{c.п} \left[1 - (1-m^2) \Omega^2 \right] \quad \left| \quad Z_{c.т m} = \frac{Z_{c.т}}{1 - (1-m^2) \Omega^2}.$$

Графики характеристических сопротивлений для ФНЧ приведены на рис. 7.10, а графики ЧХЗ и ЧХФ модифицированного ФНЧ — на рис. 7.11.

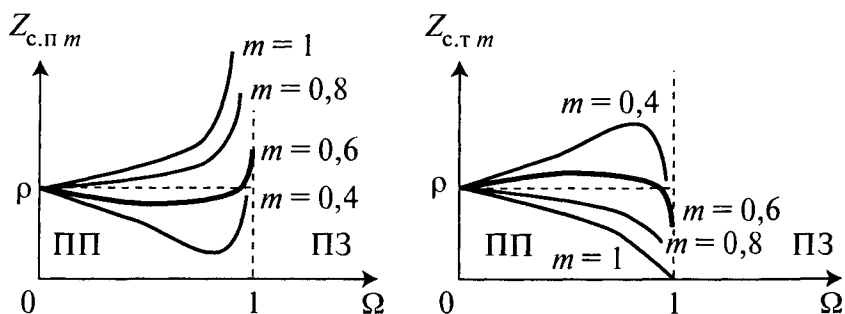


Рис. 7.10

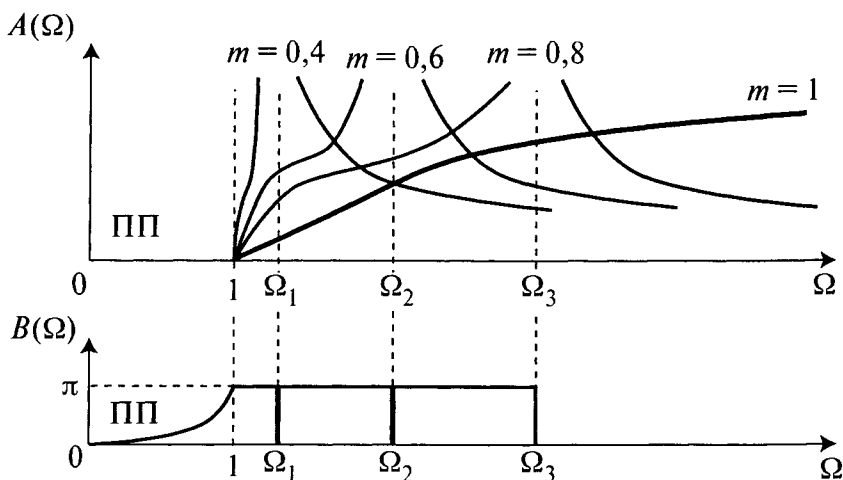


Рис. 7.11

Выводы:

1. При $m = 1$ характеристики звеньев типа « m » и типа « k » совпадают.

2. При $m = 0,6$ выходное характеристическое сопротивление в ПП наиболее равномерно, что улучшает согласование с нагрузкой.

3. Снижение величины m повышает избирательность, но при этом снижается затухание в ПЗ.

Эти особенности фильтров типа « k » и « m » определяют свойства лестничных, полиномиальных и других фильтров, для которых они являются составляющими звеньями.

7.3. Пассивные каскадные LC-фильтры

7.3.1. Мостовые фильтры

Согласно (5.27) реализуемая операторная передаточная функция (ОПФ) произвольного LC-фильтра при каскадном соединении n симметричных и согласованных между собой звеньев может быть представлена произведением операторных передаточных функций этих звеньев: $H(s) = H_1(s)H_2(s) \dots H_n(s)$.

В качестве каскадов (звеньев) обычно используются звенья второго порядка и при нечетном порядке функции $H(s)$ добавляется звено с операторной передаточной функцией первого порядка.

Основным требованием при каскадном соединении звеньев является их согласование между собой по входам и выходам, что в широком диапазоне частот возможно только при использовании симметричных мостовых четырехполюсников с постоянным характеристическим сопротивлением: $Z_{c.m} = R_0 = \text{const}$.

В качестве звеньев каскадных фильтров наиболее распространены симметричные четырехполюсники мостовой структуры (рис. 7.12).

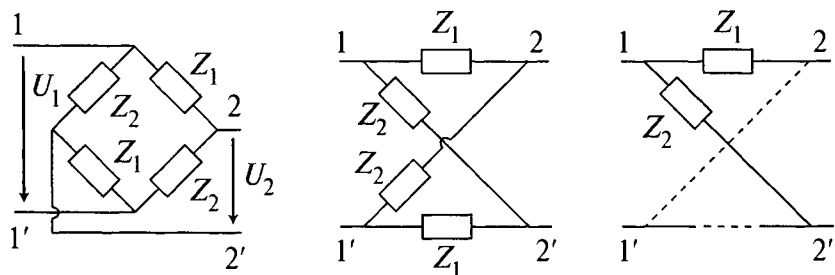


Рис. 7.12

Для симметричных мостовых четырехполюсников согласно (5.16)

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{12} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}; \quad A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}.$$

Используя (5.18), получим

$$Z_{c.м} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (7.17)$$

Согласно (5.21) и (5.24)

$$\begin{aligned} H_c(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} = \exp(-\Gamma_c) = \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \\ &= \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 - 2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1} = \frac{(\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1})^2}{(\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1})(\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1})} = \\ &= \frac{\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1}}{\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1}} \frac{\sqrt{\underline{Z}_1}}{\sqrt{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{Z}_{c.м} - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_{c.м} + \underline{Z}_1}. \end{aligned}$$

Тогда ОПФ мостового фильтра

$$H_c(s) = \frac{Z_{c.м} - Z_1}{Z_{c.м} + Z_1}. \quad (7.18)$$

При согласовании с нагрузкой R_0 необходимо обеспечить $Z_{c.м} = R_0 = \sqrt{Z_1 Z_2}$, что выполняется на одной из частот и только для дуальных Z_1 и Z_2 во всем диапазоне частот, так как для дуальных Z_1 и Z_2 величина $Z_{c.м}$ не зависит от частоты.

Например, при $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$ и $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C_2}$ имеем

$$\underline{Z}_{c.м} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = R_0.$$

Условие фильтрации (7.10) для мостового фильтра примет вид

$$-1 \leq \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} \leq 1 \quad \text{или} \quad -1 \leq \frac{X_2 + X_1}{X_2 - X_1} \leq 1. \quad (7.19)$$

Это условие выполняется при разном характере реактивных сопротивлений Z_1 и Z_2 , т.е. полоса пропускания (ПП) существует при разных знаках реактивных сопротивлений X_1 и X_2 . В этой *полосе пропускания* собственное (характеристическое) затухание $A_c = 0$, а в *полосе задерживания* (ПЗ) затухание определяется согласно (7.14).

Частоты среза ПП определяются из граничных условий:

$$X_1(\omega_{c1}) = 0; \quad X_2(\omega_{c2}) = 0. \quad (7.20)$$

На частоте баланса моста ω_6 , когда $Z_1(\omega_6) = Z_2(\omega_6)$ и $A_{11}(\omega_6) = \infty$, согласно (7.14), получим $A_c(\omega_6) = \text{Arch}|\infty| = \infty$, т.е. на частоте ω_6 имеем «полюс» ЧХЗ (аналогично фильтрам типа «т»).

Алгоритм по определению вида мостового фильтра:

- 1) качественно построить графики функций $X_1(\omega)$ и $X_2(\omega)$;
- 2) определить частоты среза согласно (7.20);
- 3) определить положение ПП согласно условию фильтрации;
- 4) построить график ЧХЗ и определить по нему вид мостового фильтра.

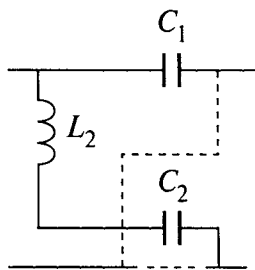


Рис. 7.13

Пример. Определить вид фильтра, частоты среза и частоту баланса моста для заданной схемы (рис. 7.13).

Согласно алгоритму действий получим график ЧХЗ (рис. 7.14), по виду которой определяем, что это ФВЧ (см. рис. 7.2).

Из условий (7.20) частоты среза:

$$\omega_{c1} = \infty \quad \text{и} \quad \omega_{c2} = \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Из условия баланса моста $X_1(\omega_6) = X_2(\omega_6)$ находим частоту баланса:

$$X_1(\omega_6) = \frac{-1}{\omega_6 C_1}; \quad X_2(\omega_6) = \omega_6 L_2 - \frac{1}{\omega_6 C_2}; \quad \omega_6 = \omega_c \sqrt{1 - \frac{C_2}{C_1}}.$$

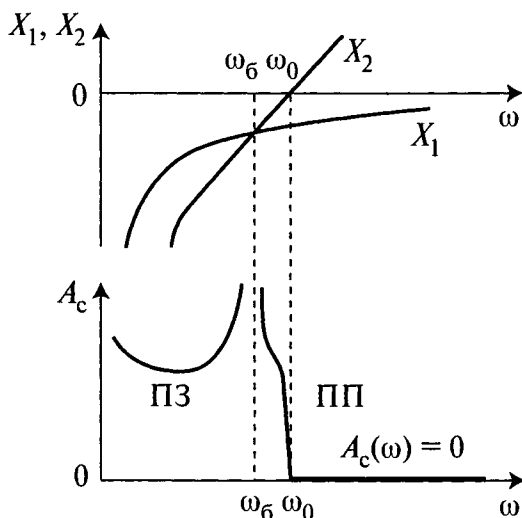


Рис. 7.14

При $C_1 \gg C_2$: $\omega_6 \approx \omega_c$, т.е. ЧХЗ вблизи частоты среза может иметь высокую крутизну, так как выбор частот ω_6 и ω_c независим друг от друга.

При $C_1 = C_2$: $\omega_6 = 0$, т.е. ЧХЗ мостового ФВЧ совпадает с ЧХЗ ФВЧ типа «к».

Определим частотную зависимость $Z_{c.м}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{c.м} &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \sqrt{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = \rho \sqrt{1 - \Omega^2}, \end{aligned}$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$ — волновое сопротивление и $\Omega = \frac{\omega_c}{\omega}$ — нормированная текущая частота для ФВЧ.

График такой зависимости приведен на рис. 7.15.

Сравнивая полученное выражение для $Z_{c.м}$ с (7.16) замечаем, что $Z_{c.м} = Z_{c.т}$, т.е. мостовые фильтры обладают недостатком фильтров типа «к»: неравномерность характеристического сопротивления в ПП.

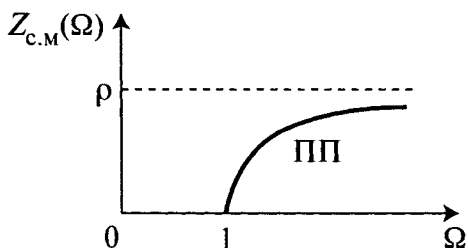


Рис. 7.15

Кроме того, они обладают недостатком фильтров типа «т»: снижение ЧХЗ в ПЗ.

Однако высокая избирательность и возможность получения узкой полосы пропускания (выбор частот среза независим друг от друга) определили их широкое распространение на практике.

Наибольшее распространение получили мостовые фильтры с дуальными Z_1 и Z_2 , которые называют **фазовыми контурами** (ФК). Они не имеют полосы задерживания и осуществляют только фазовый сдвиг, поэтому их используют в качестве звеньев фазовых корректоров и линий задержки.

Например, для схемы, приведенной на рис. 7.16, полосой пропускания будет вся ось частот.

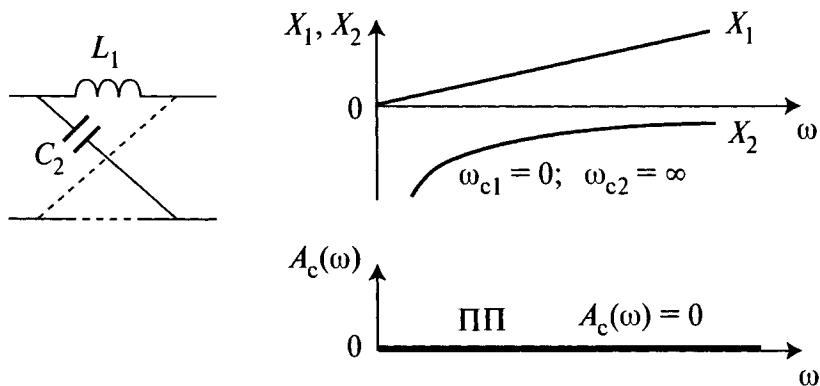


Рис. 7.16

Таким образом, в фазовом контуре полоса пропускания имеет место на всей оси частот.

7.3.2. Амплитудные и фазовые корректоры

Для безыскаженной передачи сигналов через произвольную электрическую цепь требуется, чтобы в полосе пропускания АЧХ (ЧХЗ) этой цепи была равномерной и параллельной оси частот, а ФЧХ (ЧХФ) линейно зависела от частоты. Поскольку реальные цепи не удовлетворяют этим требованиям, то для коррекции (доведения до требуемых) АЧХ и ФЧХ используют мостовые четырехполюсники, называемые *корректорами* и включаемые каскадно с корректируемой цепью. При этом произведение АЧХ цепи и корректора и сумма ФЧХ (ЧХЗ и ЧХФ) цепи и корректора должны удовлетворять требованиям безыскаженной передачи сигналов.

В качестве *амплитудного корректора* (корректора АЧХ или ЧХЗ) наиболее часто используют симметричную «перекрытую» Т-образную схему (рис. 7.17).

При $\rho = \sqrt{Z_1 Z_2}$:

$$Z_{с.м} = \rho = \text{const},$$

$$A(\omega) = \ln \left(1 + \frac{\omega X_1}{\rho} \right).$$

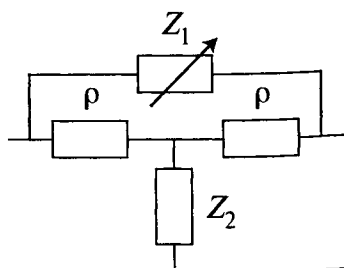


Рис. 7.17

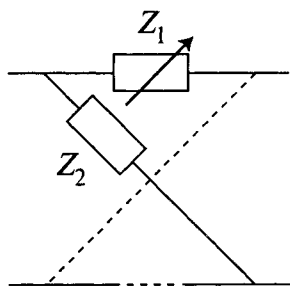


Рис. 7.18

В качестве *фазового корректора* используют фазовые контуры с постоянным характеристическим сопротивлением $Z_{с.м} = \rho = \text{const}$ (рис. 7.18):

$$\text{КЧХ: } H(j\omega) = \frac{\rho - jX_1}{\rho + jX_1} \text{ [см. (7.18)];}$$

$$\text{АЧХ: } H(\omega) = 1;$$

$$\text{ЧХЗ: } A(\omega) = -20 \lg H(\omega) = 0;$$

ФЧХ: $\varphi(\omega) = -2 \operatorname{arctg}(\omega X_1/\rho)$;

ЧХФ: $B(\omega) = -\varphi(\omega) = 2 \operatorname{arctg}(\omega X_1/\rho)$.

Рассмотренные амплитудные и фазовые корректоры являются звеньями второго порядка (биквадами). Формирование требуемых АЧХ и ФЧХ может потребовать использования корректоров более высоких порядков.

Фазовые корректоры высоких порядков называют *линиями задержки* и используют для задержки сигналов на время $t_3(\omega) = B_{лз}(\omega)/\omega$.

Частотную зависимость времени задержки $t_3(\omega)$ называют *групповым временем пробега* сигнала и используют в технике проводной связи.

Линии задержки используют также при формировании сложных импульсных сигналов, при оптимальном выделении сигналов из смеси и др.

7.4. Аппроксимация характеристик электрических фильтров

7.4.1. Методы аппроксимации частотных характеристик

Частотные характеристики (АЧХ, ФЧХ, ЧХЗ, ЧХФ и др.), заданные в виде графиков (таблиц) или функции $f(\omega)$, аппроксимируются заведомо реализуемой аналитической функцией $\Phi(\Omega)$ в заданном диапазоне частот и с заданным максимальным отклонением ϵ_{\max} в ПП. При этом наиболее распространены **два вида аппроксимации**:

- *гладкая*, например, по Батерворту;
- *равноволновая*, например, по Чебышёву.

При аппроксимации АЧХ нормированного ФНЧ-прототипа аппроксимирующей является функция вида

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{1 + F_n^2(\Omega)}, \quad (7.21)$$

где $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$ — нормированная частота ФНЧ; $F_n(\Omega)$ — функция фильтрации порядка n .

В качестве функции фильтрации используют:

$$F_n(\Omega) = \varepsilon \Omega^n \text{ (при гладкой аппроксимации);}$$

$$F_n(\Omega) = \varepsilon T_n(\Omega) \text{ (при равноволновой аппроксимации),}$$

где $\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{1 - \varepsilon_{\max}}}$ — коэффициент неравномерности АЧХ

в ПП; $T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) = 2\Omega T_{n-1}(\Omega) - T_{n-2}(\Omega)$ — полином Чебышёва порядка n , причем: $T_0(\Omega) = 1$; $T_1(\Omega) = \Omega$; $T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$; $T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$; $T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$; $T_5(\Omega) = 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$ и т.д.

Тогда аппроксимирующая функция примет вид:

а) при гладкой аппроксимации

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}}. \quad (7.22)$$

При $\varepsilon = 1$ максимальное отклонение $\varepsilon_{\max} = 0,5$ и функция (7.22) называется **функцией Батерворта**. График функции Батерворта приведен на рис. 7.19, а;

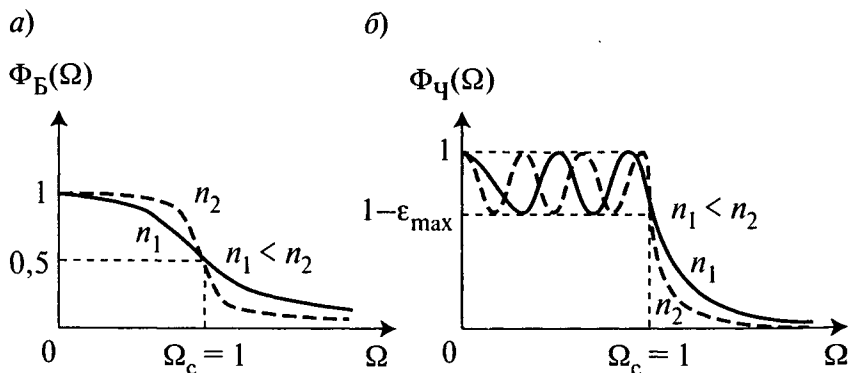


Рис. 7.19

б) при равноволновой аппроксимации (рис. 7.19, б)

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}. \quad (7.23)$$

При увеличении порядка n крутизна функций Батерворта и Чебышёва вблизи частоты среза растёт.

Комбинация гладкой и равноволновой аппроксимаций ЧХЗ ФНЧ-прототипа даёт ещё два вида аппроксимаций: $\Phi_{\text{ч.и}}(\Omega)$ — инверсная Чебышёва и $\Phi_{\text{ЗК}}(\Omega)$ — Золотарёва — Кауэра (рис. 7.20).

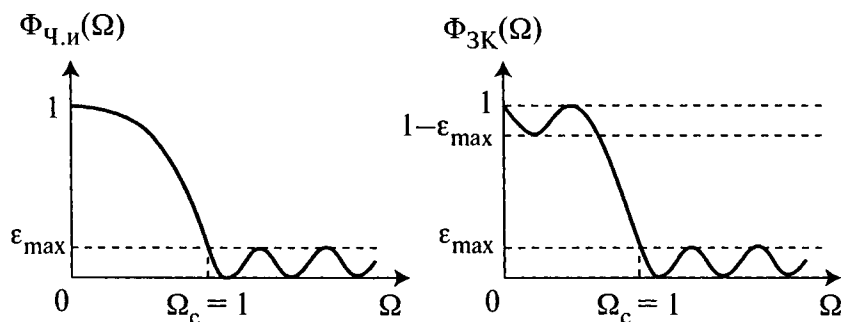


Рис. 7.20

7.4.2. Аппроксимация частотных характеристик ФНЧ-прототипа

При гладкой аппроксимации функцией Батерворта (рис. 7.21) из графика (см. рис. 7.19, а) видно, что она может аппроксимировать только функцию $H^2(\Omega)$. Аналогично при равноволновой аппроксимации функцией Чебышёва также более удобна аппроксимация функции $H^2(\Omega)$.

При аппроксимации по Батерворту

$$\Phi(\Omega) = H^2(\Omega) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}. \quad (7.24)$$

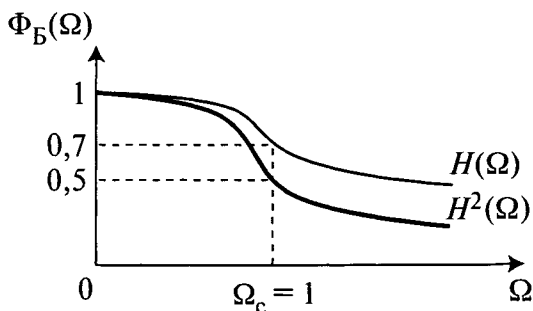


Рис. 7.21

Функция $\Phi(\Omega)$ имеет $2n$ «полюсов», получаемых из уравнения

$$1 + \Omega^{2n} = 0; \quad \Omega^j = \pm j.$$

Для перехода от функции $H^2(\Omega)$ к реализуемой функции $H(\Omega)$ необходимо из $2n$ выбрать n «полюсов», лежащих в левой полуплоскости (или на мнимой оси), и представить ее в виде

$$H(\Omega) = \frac{1}{(\Omega - \Omega_1)(\Omega - \Omega_2) \dots (\Omega - \Omega_n)} = \frac{1}{N(\Omega)}. \quad (7.25)$$

где $N(\Omega)$ — полином Гурвица, так как все его корни находятся в левой полуплоскости.

Для нормированных реактансных операторных передаточных функций, т.е. при $S = j\Omega$, получим

$$H^2(S) = H(S)H(-S) = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n S^{2n}}.$$

$2n$ «полюсов» такой функции удовлетворяют условию квадрантной симметрии, т.е. расположены равномерно на окружности единичного радиуса. Выбрав n «полюсов» из левой полуплоскости, получим

$$H(S) = \frac{1}{(S - S_1)(S - S_2) \dots (S - S_n)} = \frac{1}{N_B(S)}, \quad (7.25a)$$

где $N_B(S)$ — полином Гурвица при аппроксимации ФНЧ по Батерворту.

Фильтры с АЧХ вида (7.25) называют *полиномиальными*. На практике используется нормированная ЧХЗ:

$$A(\Omega) = -20 \lg H(\Omega).$$

«Нули» функции $H(\Omega)$ являются «полюсами» функции $A(\Omega)$.

Тогда при аппроксимации по Батерворту с учетом (7.24)

$$A(\Omega) = -20 \lg \sqrt{H^2(\Omega)} = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}). \quad (7.26)$$

На частоте среза полосы пропускания $A(\Omega_c = 1) = 10 \lg 2 = 3$ дБ.

Если требуется, чтобы $A(\Omega_c) = A_{\max} < 3$ дБ, то с учетом (7.22) получим (при $\Omega_c = 1$): $A_{\max} = 10 \lg(1 + \epsilon^2)$, т.е. коэффициент неравномерности

$$\epsilon = \sqrt{10^{0,1A_{\max}} - 1}, \quad (7.27)$$

тогда ЧХЗ $A(\Omega) = 10 \lg(1 + \epsilon^2 \Omega^{2n})$.

Рассмотрим определение требуемого порядка n , если задано «качество фильтрации» ФНЧ: A_{\max} , A_{\min} и $\Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_c}$ — нормированная частота среза ПЗ (рис. 7.22).

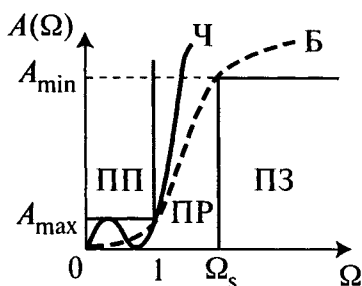


Рис. 7.22

Из (7.26) следует:

$$1 + \Omega^{2n} = 10^{0,1A}; \quad 1 + \Omega_s^{2n} = 10^{0,1A_{\min}}.$$

Тогда
$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega}\right)^n = \sqrt{\frac{10^{0,1A_{\min}} - 1}{10^{0,1A} - 1}}.$$

При $\Omega = \Omega_c = 1$: $A \leq A_{\max}$, т.е. после подстановки A_{\max} получим

$$\Omega_s^n \geq \sqrt{\frac{10^{0,1A_{\min}} - 1}{10^{0,1A_{\max}} - 1}} = C.$$

Следовательно, **порядок ФНЧ-прототипа при аппроксимации по Батерворту:**

$$n_B \geq \frac{\lg C}{\lg \Omega_s}. \quad (7.28)$$

Аналогично при аппроксимации по Чебышёву с учетом (7.23) получим

$$A(\Omega) = 10 \lg \left[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) \right], \quad (7.29)$$

где ε определяется по (7.27), так как $A_{\max} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2)$.

Рассуждая для (7.29) так же, как и для (7.26), получим **порядок ФНЧ-прототипа при аппроксимации по Чебышёву:**

$$n_{\text{ч}} \geq \frac{\lg \left(C + \sqrt{C^2 - 1} \right)}{\lg \left(\Omega_s + \sqrt{\Omega_s^2 - 1} \right)}. \quad (7.30)$$

Аналогично (7.25а) получим нормированную реактансную операторную функцию ФНЧ-прототипа по Чебышёву:

$$H(S) = \frac{1}{\varepsilon N_{\text{ч}}(S)}, \quad (7.31)$$

где $N_{\text{ч}}(S)$ — полином Гурвица при аппроксимации ФНЧ по Чебышёву.

Сравнение (7.28) и (7.30) показывает, что при одинаковом заданном «качестве фильтрации» (величины C и Ω_s) для фильтров Чебышёва требуется меньший порядок, чем для фильтров Батерворта, т.е. их реализация требует меньшего числа звеньев.

При аппроксимации по Чебышёву ЧХЗ более крутая, т.е. избирательные свойства полиномиальных фильтров Чебышёва лучше, чем у фильтров Батерворта. Фильтры Чебышёва имеют также более равномерную ЧХЗ в ПП, но их фазовая характеристика более нелинейная, что создает дополнительные фазовые искажения.

7.4.3. Частотные преобразования при синтезе фильтров

Синтез произвольных фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) может осуществляться путем частотных преобразований параметров частотных характеристик ФНЧ-прототипа в параметры частотных характеристик требуемого фильтра (ФВЧ, ПФ, РФ). Условиями таких преобразований является равенство сопротивлений (проводимостей) продольных и поперечных ветвей ФНЧ-прототипа и требуемого фильтра.

Например, при преобразовании ФНЧ-прототипа в ФНЧ с другой частотой среза ω'_c согласно этим условиям получим равенства:

$$\omega_c L_1 = \omega'_c L'_1; \quad \omega_c C_2 = \omega'_c C'_2. \quad (7.32)$$

При преобразовании ФНЧ-прототипа в ФВЧ с частотой среза ω'_c получим равенства:

$$\omega_c L_1 = \frac{1}{\omega'_c C_1}, \quad C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1}; \quad \frac{1}{\omega_c C_2} = \omega'_c L_2, \quad L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C_2},$$

где

$$\omega_0^2 = \omega_c \omega'_c. \quad (7.33)$$

Пример. Пусть ФНЧ-прототип (рис. 7.23) имеет: $\omega_c = 2$ рад/с; $\omega_s = 5$ рад/с. Требуется построить ЧХЗ ФВЧ при $\omega_0 = 4$ рад/с.

Согласно (7.33) получим:

$$\omega'_c = \omega_0^2 / \omega_c = 16/2 = 8 \text{ рад/с};$$

$$\omega'_s = \omega_0^2 / \omega_s = 16/5 = 3,2 \text{ рад/с}.$$

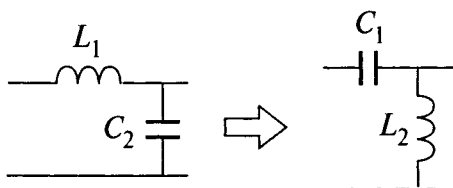


Рис. 7.23

Тогда ЧХЗ ФНЧ-прототипа и ЧХЗ ФВЧ примут вид, приведенный на рис. 7.24.

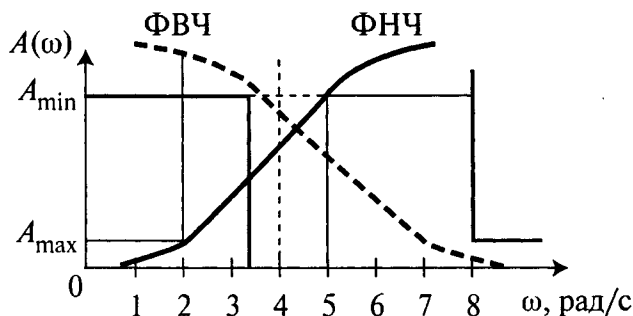


Рис. 7.24

При преобразовании ФНЧ-прототипа в ПФ (рис. 7.25) относительно частоты ω_0 получим равенства:

$$\omega_0 L = \omega_0 L_1 = \frac{1}{\omega_0 C_1}; \quad L_1 = L; \quad C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L};$$

$$\omega_0 C = \omega_0 C_2 = \frac{1}{\omega_0 L_2}; \quad C_2 = C; \quad L_2 = \frac{1}{\omega_0^2 C},$$

где частота ω_0 выбирается из условия геометрической симметрии частот среза ПФ:

$$\omega_0^2 = \omega_{c1} \omega_{c2} = \omega_{s1} \omega_{s2}. \quad (7.34)$$

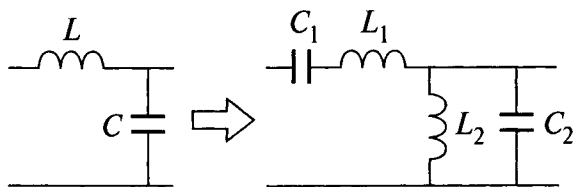


Рис. 7.25

В многозвенных фильтрах такое преобразование нормированных текущих частот ФНЧ-прототипа в текущие частоты ПФ называют *денормированием*, в процессе которого из одной *нормированной* частоты Ω ФНЧ получают две *денормированные* частоты ПФ.

7.5. Синтез пассивных LC-фильтров

7.5.1. Реализация пассивных лестничных фильтров

Для двусторонне нагруженного четырехполюсника (рис. 7.26) установим взаимосвязь реактансной функции $H(S)$ с нормированной входной функцией

$$Z_{\text{вх.н}}(S) = \frac{Z_{\text{вх}}}{R_0} \text{ при } R_1 = R_2 = R_0.$$

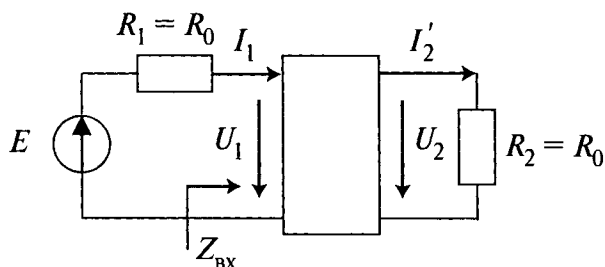


Рис. 7.26

Для удобства аналогично (5.34) введем понятие *операторного коэффициента отражения по входу*:

$$\begin{aligned} n_1(S) &= \frac{R_0 - Z_{\text{вх}}(S)}{R_0 + Z_{\text{вх}}(S)} = \frac{1 - Z_{\text{вх.н}}(S)}{1 + Z_{\text{вх.н}}(S)} = \\ &= \sqrt{\frac{P_{2m} - P_2}{P_{2m}}} = \sqrt{\frac{P_o}{P_{2m}}}, \end{aligned} \quad (7.35)$$

где P_{2m} и P_2 — активная мощность в нагрузке при отсутствии и при включении фильтра между источником

и нагрузкой соответственно; $P_o = P_{2m} - P_2$ — отраженная активная мощность за счет рассогласования с источником (резистивные потери в фильтре с реактивными элементами отсутствуют).

Тогда нормированное входное сопротивление

$$Z_{\text{вх.н}}(S) = \frac{1 - n_1(S)}{1 + n_1(S)}. \quad (7.36)$$

Рабочая АЧХ четырехполюсника в режиме двусторонней нагрузки определяется выражением (5.30). Тогда функция $H^2(S)$ с учетом условия $R_1 = R_2 = R_0$ примет вид

$$\begin{aligned} H^2(S) &= \frac{4U_2^2}{E^2} = \frac{U_2^2}{(E/2)^2} = \frac{P_2}{P_{2m}} = \\ &= \frac{P_{2m} - P_o}{P_{2m}} = 1 - \frac{P_o}{P_{2m}} = 1 - n_1^2(S). \end{aligned}$$

Учитывая, что согласно (7.24) $H^2(S) = \frac{1}{1 + F_n^2(S)}$,

$$n_1^2(S) = 1 - H^2(S) = 1 - \frac{1}{1 + F_n^2(S)} = \frac{F_n^2(S)}{1 + F_n^2(S)} = F_n^2(S) H^2(S).$$

Используя свойство квадрантной симметрии (см. 7.4.2), получим

$$n_1^2(S) = n_1(S)n_1(-S), \quad n_1(S) = \pm\sqrt{n_1^2(S)} = \pm F_n(S)H(S).$$

Тогда после подстановки в (7.36) и с учетом (7.25а) или (7.31) имеем

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх.н}}(S) &= \frac{1 - [\pm F_n(S)H(S)]}{1 + [\pm F_n(S)H(S)]} = \frac{1 - \frac{\pm F_n(S)}{N(S)}}{1 + \frac{\pm F_n(S)}{N(S)}} = \\ &= \frac{N(S) - [\pm F_n(S)]}{N(S) + [\pm F_n(S)]}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Если при аппроксимации по Батерворту в качестве функции фильтрации выбирается $F_n(S) = S^n$ (см. 7.4.1), то при аппроксимации по Чебышёву — нормированный полином Чебышёва с положительными коэффициентами, полученный путем замены всех Ω на положительные S . Например, для первых пяти порядков получим табл. 7.1.

Таблица 7.1

n	Полином Чебышёва $T_n(\Omega)$	Нормированный полином Чебышёва	Функция фильтрации $F_n(S)$
1	Ω	Ω	S
2	$2\Omega^2 - 1$	$\Omega^2 - 0,5$	$S^2 + 0,5$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$	$\Omega^3 - 0,75\Omega$	$S^3 + 0,75S$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$	$\Omega^4 - \Omega^2 + 0,125$	$S^4 + S^2 + 0,125$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$	$\Omega^5 - 1,125\Omega^3 + 0,313\Omega$	$S^5 + 1,125S^3 + 0,313S$

Выражение (7.37) аналогично (7.5) может быть представлено отношением полинома степени m к полиному степени n . При $m > n$ выражение (7.37) может быть разложено в цепную дробь:

$$Z_{\text{вх.н}}(S) = z_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{y_4 + \dots}}}$$

Нормированные элементы разложения $z_1, y_2, z_3, y_4, \dots$ соответствуют денормированным элементам лестничной схемы (см. рис. 7.3, а): $Z_i = z_i R_0$ и $Y_i = y_i / R_0$. Разложение прекращается после получения простых остатков, которым соответствуют простейшие реактивные двухполюсники (рис. 7.27):

$$\text{а) } z(S) = SL; \quad y(S) = \frac{1}{SL}; \quad (7.38)$$

$$\text{б) } z(S) = \frac{1}{SC}; \quad y(S) = SC; \quad (7.39)$$

$$в) z(S) = SL + \frac{1}{SC} = \frac{S^2 + \Omega_0^2}{S/L}; \quad y(S) = \frac{1}{z(S)}; \quad (7.40)$$

$$г) y(S) = SC + \frac{1}{SL} = \frac{S^2 + \Omega_0^2}{S/C}; \quad z(S) = \frac{1}{y(S)}. \quad (7.41)$$

В зависимости от выбора нижних или верхних знаков в выражении (7.37) получим лестничную схему либо как на рис. 7.3, а, либо как на рис. 7.3, б соответственно. Поскольку при выборе верхних знаков получим $m < n$, то при разложении в цепную дробь следует использовать обратную функцию $Y_{\text{вх}}(S) = 1/Z_{\text{вх}}(S)$, для которой $m > n$.

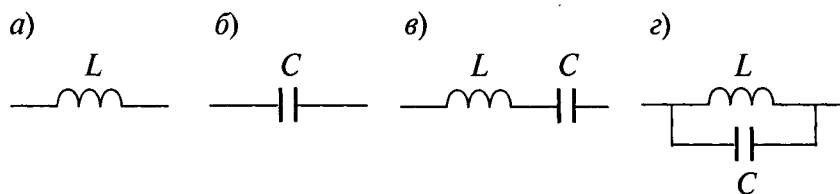


Рис. 7.27

Пример. Пусть задан полином Гурвица при аппроксимации по Батерворту:

$$N(S) = S^3 + 2S^2 + 2S + 1.$$

Требуется реализовать лестничную схему фильтра.

Поскольку $F_n(S) = S^3$, то при выборе нижних знаков в (7.37) получим

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх.н}}(S) &= \frac{S^3 + 2S^2 + 2S + 1 + S^3}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1 - S^3} = \\ &= \frac{2S^3 + 2S^2 + 2S + 1}{2S^2 + 2S + 1}. \end{aligned}$$

Здесь $m = 3$, $n = 2$.

Процедура разложения в цепную дробь есть процедура «деления — обращения остатка»:

$$\begin{array}{r|l} 2S^3 + 2S^2 + 2S + 1 & 2S^2 + 2S + 1 \\ - 2S^3 + 2S^2 + S & \\ \hline \text{остаток } S + 1 & S \Rightarrow z_1 \end{array}$$

- делим делитель на первый остаток:

$$\begin{array}{r|l} 2S^2 + 2S + 1 & S + 1 \\ - 2S^2 + 2S & \\ \hline \text{остаток } S + 1 & 2S \Rightarrow y_2 \end{array}$$

- делим делитель на второй остаток:

$$\begin{array}{r|l} S + 1 & 1 \\ - S & \\ \hline \text{остаток } 1 & S \Rightarrow z_3 \end{array}$$

Разложение в цепную дробь при $n = 3$ примет вид

$$Z_{\text{вх.н}}(S) = z_1 + \frac{1}{y_2 + \frac{1}{z_3 + 1}} = S + \frac{1}{2S + \frac{1}{S + 1}},$$

где $z_1 = S \cdot 1$; $y_2 = S \cdot 2$; $z_3 = S \cdot 1$; $y_4 = S^0 \cdot 1$.

После денормирования с учетом (7.4) получим (рис. 7.28):

$$Z_1 = z_1 K_l = S \frac{R_0}{\omega_c}, \quad L_1 = \frac{R_0}{\omega_c} \text{ (Гн);}$$

$$Y_2 = y_2 K_c = 2S \frac{1}{\omega_c R_0}, \quad C_2 = \frac{2}{\omega_c R_0} \text{ (Ф);}$$

$$Z_3 = z_3 K_l = S \frac{R_0}{\omega_c}, \quad L_2 = \frac{R_0}{\omega_c} \text{ (Гн);}$$

$$Y_4 = \frac{y_4}{K_r} = \frac{1}{R_0}, \quad G_4 = \frac{1}{R_0} \text{ (См).}$$

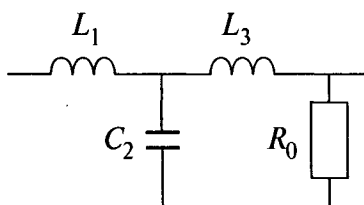


Рис. 7.28

7.5.2. Реализация пассивных каскадных фильтров

Методы реализации заданных функций $H_i(s)$ согласованных мостовых звеньев каскадных фильтров сводятся к определению аналитических выражений для сопротивлений Z_1 и Z_2 и реализации этих сопротивлений с помощью элементарных двухполюсников (МФЦ):

- реактивных согласно (7.38)–(7.41);
- смешанных (рис. 7.29):

$$\text{а) } \tau = RC; \quad Z(s) = R + \frac{1}{sC} = \frac{1 + s\tau}{sC}; \quad (7.42)$$

$$\text{б) } \tau = L/R; \quad Z(s) = R + sL = R(1 + s\tau); \quad (7.43)$$

$$\text{в) } \tau = RC; \quad Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + sC} = \frac{R}{1 + s\tau}; \quad (7.44)$$

$$\text{г) } \tau = L/R; \quad Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} = \frac{sL}{1 + s\tau}. \quad (7.45)$$

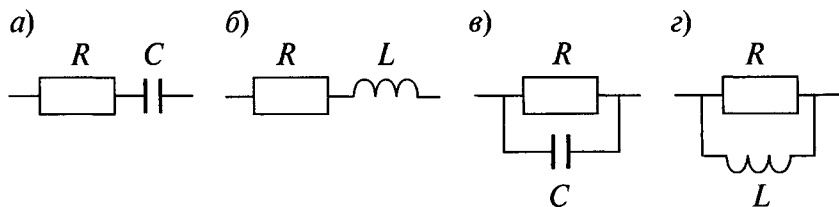


Рис. 7.29

Рассмотрим некоторые методы реализации звеньев пассивного каскадного фильтра. Для ненормированных параметров:

$$\text{из (7.17) следует} \quad Z_2(s) = \frac{R_0^2}{Z_1}; \quad (7.46)$$

$$\text{из (7.18) получим} \quad Z_1(s) = R_0 \frac{1 - H_c(s)}{1 + H_c(s)}. \quad (7.47)$$

Порядок функции $H_c(s)$ определяет порядок двухполюсников, реализуемых сопротивлениями $Z_1(s)$ и $Z_2(s)$.

1. Реализация мостовых билинов при согласовании на одной частоте ω_0 , т.е. при $Z_c(\omega_0) = R_0$.

Пример. Пусть задана передаточная функция звена

$$\text{НЧ-1: } H_c(s) = \frac{1}{1 + s\tau}. \text{ Тогда}$$

$$Z_1 = R_0 \frac{1 - \frac{1}{1 + s\tau}}{1 + \frac{1}{1 + s\tau}} = R_0 \frac{s\tau}{2 + s\tau} = R_0 \frac{s \frac{\tau}{2}}{1 + s \frac{\tau}{2}};$$

$$Z_2 = \frac{R_0^2}{Z_1} = \frac{1 + s \frac{\tau}{2}}{s \frac{\tau}{2} 2R_0}.$$

Согласно (7.45) Z_1 есть смешанная параллельная цепь (см. рис. 7.29, *з*) с параметрами:

$$L_1 = R_0 \frac{\tau}{2} \text{ (Гн); } \tau_1 = \frac{\tau}{2} = \frac{L_1}{R_1}; \quad R_1 = R_0 \text{ (Ом),}$$

а Z_2 согласно (7.42) есть смешанная последовательная цепь (см. рис. 7.29, *а*) с параметрами:

$$C_2 = \frac{\tau}{2R_0} \text{ (Ф); } \tau_2 = \frac{\tau}{2} = R_2 C_2; \quad R_2 = R_0 \text{ (Ом).}$$

Схема реализации мостового билина приведена на рис. 7.30.

2. Реализация фазовых контуров (ФК). Передаточная функция ФК

(см. 7.1.3) $H_c(s) = \frac{M(-s)}{M(s)}$. Тогда

согласно (7.47)

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_0 \frac{M(s) - M(-s)}{M(s) + M(-s)} = \\ &= R_0 \frac{M_{\text{нечет}}(s)}{M_{\text{чет}}(s)}. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Пример. Задана передаточная функция ФК

$$H_c(s) = \frac{s^2 - 9s + 8}{s^2 + 9s + 8}.$$

Тогда $M_{\text{нечет}}(s) = 9s$; $M_{\text{чет}}(s) = s^2 + 8$, т.е. согласно (7.48):

$$Z_1 = R_0 \frac{9s}{s^2 + 8}; \quad Z_2 = \frac{R_0^2}{Z_1} = R_0 \frac{s^2 + 8}{9s}.$$

Согласно (7.41) Z_1 есть параллельный контур (см. рис. 7.27, з) с параметрами:

$$\frac{1}{C_1} = 9R_0, \quad C_1 = \frac{1}{9R_0} \text{ (Ф)}; \quad \omega_0^2 = 8 \text{ (рад/с)};$$

$$L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1} = \frac{9R_0}{8} \text{ (Гн)},$$

а Z_2 согласно (7.40) есть последовательный контур (см. рис. 7.27, в) с параметрами:

$$\frac{1}{L_2} = \frac{9}{R_0}, \quad L_2 = \frac{R_0}{9} \text{ (Гн)}; \quad \omega_0^2 = 8 \text{ (рад/с)};$$

$$C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 L_2} = \frac{9}{8R_0} \text{ (Ф)}.$$

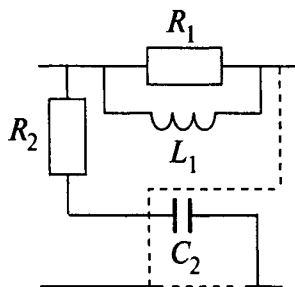


Рис. 7.30

Схема реализации ФК приведена на рис. 7.31.

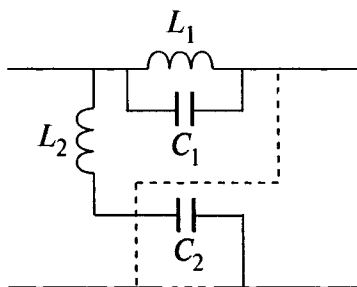


Рис. 7.31

7.6. Реализация активных RC-фильтров

7.6.1. Методы реализации активных фильтров

В настоящее время широкое распространение в слаботочной радиотехнике и технике электросвязи находят активные фильтры на базе операционных усилителей (ОУ) и элементов R и C , получивших название **активных RC-фильтров**, так как они имеют следующие преимущества перед пассивными LC-фильтрами:

- малые габариты, масса и стоимость;
- отсутствие сложных в изготовлении катушек индуктивности;
- возможность усиления сигналов в процессе фильтрации;
- высокое «качество фильтрации».

Однако частотные свойства активных фильтров ограничиваются частотными возможностями операционных усилителей и стабильность их характеристик ниже, чем у пассивных.

Условия физической реализации и методы аппроксимации заданных характеристик для RC-фильтров такие же, как у пассивных фильтров, отличие лишь в методах реализации.

Различают следующие методы реализации активных RC-фильтров:

1) имитация пассивных аналогов:

- подстановка искусственных элементов (гираторов, суперемкостей, коммутируемых емкостей);
- моделирование взаимосвязи токов и напряжений;

2) декомпозиция функций $H(s)$:

- каскадная реализация на базе билинов и биквадов;
- моделирование функции $H(s)$ элементами АВТ.

Методами имитации пассивных лестничных фильтров-аналогов реализуются обычно *лестничные* структуры активных фильтров. При этом возможны два варианта:

1) пассивные элементы заменяются активными, искусственно воссоздающими индуктивные, резистивные и емкостные элементы пассивного аналога;

2) моделируются взаимосвязи токов и напряжений пассивного аналога, что приводит к структуре с *чрез-звенной* связью [2].

Методами декомпозиции передаточных функций фильтров реализуются обычно *каскадные* структуры (при декомпозиции в виде произведения функций билинов и биквадов), реже *параллельные* (при декомпозиции в виде алгебраической суммы функций билинов и биквадов) или структуры, реализующие функции $H(s)$ *элементами аналоговой вычислительной техники*.

Основным критерием при выборе метода реализации является стабильность частотных характеристик фильтра при изменении параметров элементов схемы и источников питания.

7.6.2. Реализация активных лестничных фильтров

Трудности создания катушек индуктивности привели к появлению активных элементов — *гираторов* (инверторов положительных сопротивлений), которые преобразуют емкостную нагрузку в требуемую

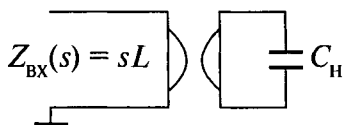


Рис. 7.32

величину индуктивности (см. 5.7.3). Условное обозначение гириатора на двух ОУ приведено на рис. 7.32.

Поскольку гириатор нуждается в «заземлении» по схеме питания, то он может заменять только *заземленные индуктивные элементы* пассивного фильтра-аналога, например, схема звена ФВЧ примет вид, приведенный на рис. 7.33.

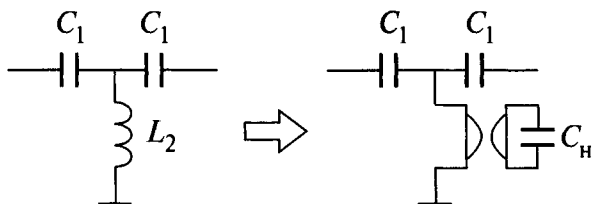


Рис. 7.33

При необходимости заменять *незаземленные индуктивные элементы* приходится применять *сдвоенные гириаторы* на четырех ОУ. При большом числе незаземленных индуктивных элементов такая замена неэкономична, в этом случае более целесообразно использовать *суперъёмкости* (конверторы положительных сопротивлений),

которые имеют входное сопротивление $Z_{вх}(s) = \frac{1}{s^2 D}$.

Условное обозначение суперъёмкости: $\frac{D}{s^2} |||$

При использовании суперъёмкостей (D -элементов) вместо *заземленных емкостей* пассивного фильтра-аналога необходимо преобразование остальных элементов (L и R) в другие элементы с учетом коэффициента конверсии $K_K(s) = K/s$, где K — постоянный коэффициент с размерностью $(\Phi \cdot \text{Ом})^{-1}$.

При таком преобразовании получим:

- для емкости: $\frac{1}{sC} \frac{K}{s} = \frac{1}{s^2 \cdot C/K} = \frac{1}{s^2 D}$,

т.е. $C \rightarrow D = C/K (\Phi^2 \cdot \text{Ом})$;

- для индуктивности: $sL \frac{K}{s} = LK$,
т.е. $L \rightarrow R' = LK$ (Ом);
- для резистора: $R \frac{K}{s} = \frac{1}{s \frac{1}{RK}}$,
т.е. $R \rightarrow C' = \frac{1}{RK}$ (Ф).

Таким образом, при использовании вместо заземленных емкостей пассивного фильтра-аналога активных суперемкостей необходимо вместо *индуктивных элементов* фильтра-аналога использовать соответствующие резисторы, а вместо *резисторов* — емкости.

Например, при реализации схемы пассивного П-образного ФНЧ активными элементами (рис. 7.34) с сохранением требуемой передаточной функции $H(s)$ получим:

- для пассивного фильтра

$$H(s) = \frac{1}{sC_2} \cdot \frac{1}{sL_1 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{s^2 L_1 C_2 + 1};$$

- для эквивалентного активного фильтра

$$H(s) = \frac{1}{s^2 D} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{s^2 D}} = \frac{1}{s^2 DR + 1}. \quad (7.49)$$

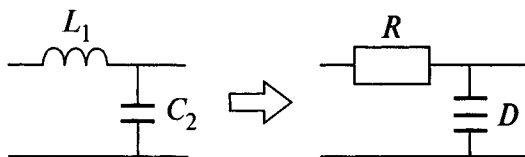


Рис. 7.34

Сравнивая правые части функций $H(s)$, получим $L_1 C_2 = DR$. Задаваясь величиной R (или D), определяем требуемую величину D (или R).

7.6.3. Реализация активных билинов и биквадов

Среди методов декомпозиции наибольшее распространение получило представление передаточной функции $H(s)$ в виде произведения передаточных функций билинов и биквадов. Реализация таких звеньев позволяет создать каскадную структуру активного RC-фильтра.

Реализация билинов осуществляется с помощью операционных усилителей с инвертирующим входом (рис. 7.35), для которых с учетом их свойств

$$U_1 = Z_1 I_1; \quad U_2 = -Z_0 I_1.$$

$$\text{Тогда } H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Z_0}{Z_1}.$$

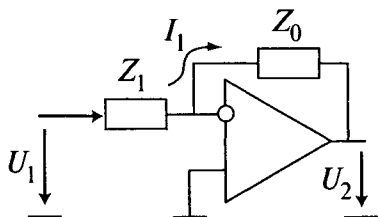


Рис. 7.35

В качестве Z_1 и Z_0 используют параллельное или последовательное соединение элементов R и C . Например, при параллельном соединении

$$Z_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_0} + sC_0}; \quad Z_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_1}.$$

Тогда общее выражение для ОПФ билинов будет

$$H(s) = \frac{a_0 + sa_1}{b_0 + sb_1} = \frac{-Z_0}{Z_1} = -\frac{\frac{1}{R_1} + sC_1}{\frac{1}{R_0} + sC_0}. \quad (7.50)$$

В частном случае, например, ОПФ интегратора

$$H(s) = \frac{a_0}{sb_1} = \frac{-Z_0}{Z_1} = -\frac{R_1}{sC_0} = \frac{-1}{sC_0R_1}.$$

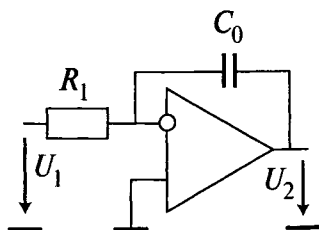


Рис. 7.36

Схема интегратора приведена на рис. 7.36.

При реализации активных RC -фильтров используют схемы суммирующего усилителя (а) и суммирующего интегратора (б) на n входов (рис. 7.37).

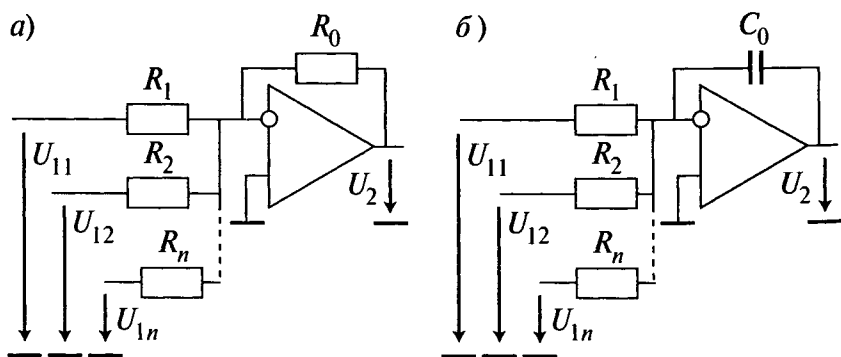


Рис. 7.37

С учетом принципа суперпозиции (метода наложения) для этих схем получим:

$$а) \quad U_2 = -\sum_{i=1}^n U_{1i} H_i(s) = -R_0 \sum_{i=1}^n \frac{U_{1i}}{R_i}; \quad (7.51)$$

$$б) \quad U_2 = -\sum_{i=1}^n U_{1i} H_i(s) = -\frac{1}{sC_0} \sum_{i=1}^n \frac{U_{1i}}{R_i}. \quad (7.52)$$

Рассмотрим теперь реализацию биквадов, которая зависит от добротности звена $Q = \frac{\omega_0}{2\sigma}$.

Рассмотрим реализацию среднедобротного ($2 < Q < 20$) звена на базе ИНУН с частотно-зависимой обратной связью (ЧЗОС). Схема ИНУН с ЧЗОС имеет вид (рис. 7.38).

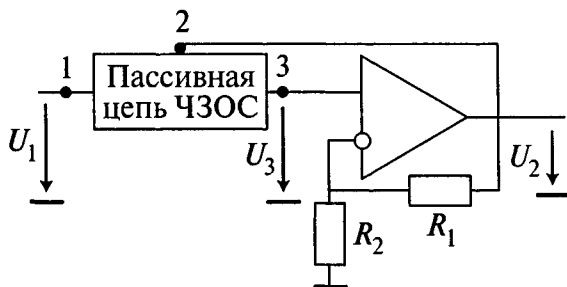


Рис. 7.38

Для ИНУН $K_u = \frac{U_2}{U_3} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$, причем $K_u < 3$.

При использовании цепи ЧЗОС такого вида, как на рис. 7.39, произведя расчет функций H_{13} и H_{23} , например, по методу узловых напряжений, получим (убедиться самостоятельно):

$$H(s) = \frac{K_u}{(1 - K_u) \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1 + Z_3}{Z_4} + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} + 1}. \quad (7.53)$$

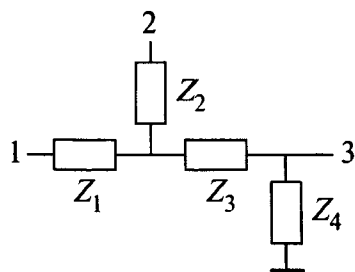


Рис. 7.39

Рассмотрим частные случаи из (7.53).

1. При $Z_1 = R_1$, $Z_2 = \frac{1}{sC_2}$,

$Z_3 = R_3$, $Z_4 = \frac{1}{sC_4}$

$$H(s) = \frac{K_u \omega_0^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_4}$; $2\sigma = \omega_0^2 [(R_1 + R_3)C_4 + (1 - K_u)R_1 C_2]$.

В этом случае получим звено НЧ-2.

2. При $Z_1 = \frac{1}{sC_1}$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = \frac{1}{sC_3}$, $Z_4 = R_4$

$$H(s) = \frac{K_u s^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{C_1 C_3 R_2 R_4}$; $2\sigma = \omega_0^2 [(C_1 + C_3)R_2 + (1 - K_u)C_3 R_4]$.

В этом случае получим звено ВЧ-2.

3. При $Z_1 = R_1$, $Z_2 = \frac{1}{sC_2}$, $Z_3 = \frac{1}{sC_3}$, $Z_4 = R_4$

$$H(s) = \frac{K_u \omega_0^2 C_3 R_4 s}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{(1 - K_u)R_1 R_4 C_2 C_3}$; $2\sigma = \omega_0^2 [R_1 C_2 + C_3 (R_1 + R_4)]$.

В этом случае получим полосовое звено.

При расчете одни параметры звеньев задаются исходя из практики проектирования, а другие определяются из указанных соотношений.

7.6.4. Реализация биквадов на базе элементов аналоговой вычислительной техники

Стабильность биквадов можно повысить за счет введения отрицательной обратной связи, что требует повышенного расхода операционных усилителей.

Одним из методов получения стабильных биквадов является также моделирование передаточной функции элементами аналоговой вычислительной техники (АВТ), специально предназначенными для целей моделирования функций.

Обратным алгебраическим преобразованием можно показать, что функция $H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$ может быть представлена следующей совокупностью дробей:

$$U_2 = a_2 U_1 + a_1 \frac{U_1}{s} + a_0 \frac{U_1}{s^2} - b_1 \frac{U_2}{s} - b_0 \frac{U_2}{s^2}. \quad (7.54)$$

Для реализации функции (7.54) необходимы суммирующий усилитель (см. рис. 7.37, а), суммирующий интегратор (см. рис. 7.37, б) и инвертор.

Тогда моделирование функции (7.54) примет вид, приведенный на рис. 7.40.

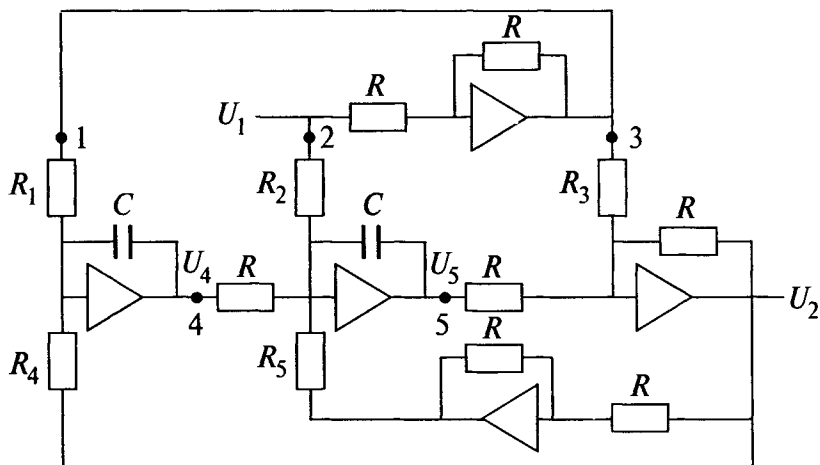


Рис. 7.40

В этой схеме согласно (7.51) и (7.52):

$$U_2 = -U_1 \frac{-R}{R_3} + U_5 \frac{-R}{R};$$

$$U_5 = U_1 \frac{-1}{s R_2 C} + U_4 \frac{-1}{s R C} + (-U_2) \frac{-1}{s R_5 C};$$

$$U_4 = -U_1 \frac{-1}{s R_1 C} + U_2 \frac{-1}{s R_4 C}.$$

После последовательных подстановок имеем

$$U_2 = \frac{R}{R_3} U_1 + \frac{1}{R_2 C} \frac{U_1}{s} + \frac{1}{R_1 R C^2} \frac{U_1}{s^2} - \frac{1}{R_5 C} \frac{U_2}{s} - \frac{1}{R_4 R C^2} \frac{U_2}{s^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (7.54), получим соотношения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{R}{R_3}; & a_1 &= \frac{1}{R_2 C}; & a_0 &= \frac{1}{R_1 R C^2}; \\ b_1 &= \frac{1}{R_5 C}; & b_0 &= \frac{1}{R_4 R C^2}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

В частных случаях имеем:

1) при $R_2 = R_3 = \infty$ (разрыв в точках 2 и 3) $a_2 = a_1 = 0$, т.е. звено НЧ-2;

2) при $R_1 = R_2 = \infty$ (разрыв в точках 1 и 2) $a_1 = a_0 = 0$, т.е. звено ВЧ-2;

3) при $R_1 = R_3 = \infty$ (разрыв в точках 1 и 3) $a_2 = a_0 = 0$, т.е. полосовое звено (полосовой фильтр);

4) при $R_2 = \infty$ (разрыв в точке 2) $a_1 = 0$, т.е. режекторное звено (режекторный фильтр).

Рассмотренная методика моделирования может использоваться при любом порядке звена n . Недостатком такой реализации является большой расход операционных усилителей. Промышленные образцы таких биквадров содержат всего три ОУ.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Параметры, задающие «качество фильтрации».
2. ФНЧ-прототип.
3. Свойства МФЦ и ФК.
4. Условия фильтрации лестничных фильтров.
5. Особенности фильтров типа « k ».
6. Особенности фильтров типа « m ».
7. Условия фильтрации мостовых фильтров.

8. Достоинства и недостатки мостовых фильтров.
9. Виды и назначение корректоров.
10. Особенности видов аппроксимации частотных характеристик.
11. Параметры, определяющие порядок ФНЧ-прототипа.
12. Сущность частотных преобразований при синтезе фильтров.
13. Лестничная реализация пассивных фильтров.
14. Реализация фазовых контуров.
15. Методы реализации активных фильтров.
16. Можно ли на базе АВТ построить фильтр 3-го порядка и более?

Тема 8. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

8.1. Принципы дискретной и цифровой фильтрации

8.1.1. Общие сведения о дискретных и цифровых фильтрах

Рассмотренные в предыдущей теме аналоговые электрические фильтры используются для фильтрации *аналоговых*, т.е. непрерывных во времени, сигналов (воздействий).

Бурное развитие цифровых вычислительных машин и связанных с ними цифровых систем передачи информации, а также соответствующей элементной базы (интегральных микросхем, микропроцессорных комплексов, оптоэлектронных элементов и т.п.) создало предпосылки для внедрения методов **цифровой фильтрации сигналов**, т.е. методов обработки (в частном случае — передачи) информации, представленной *цифровыми* сигналами.

Цифровая фильтрация, в сравнении с аналоговой, обладает бóльшими точностью и достоверностью, универсальностью и надежностью обработки информации за счет возможности смены алгоритма обработки (фильтрации), а не самого устройства обработки (фильтра). Основным недостатком цифровых фильтров является их недостаточное быстродействие, что ограничивает верхнюю частоту спектра обрабатываемых сигналов. Однако по мере развития элементной базы и алгоритмов обработки сигналов этот недостаток постепенно исчезает.

Обобщенная структурная схема цифровой фильтрации приведена на рис. 8.1. Здесь используются следующие обозначения:

Д — *дискретизатор* — устройство дискретизации непрерывных сигналов по времени, т.е. устройство преобразования непрерывных сигналов v_1 в дискретные $v_{1д}$;

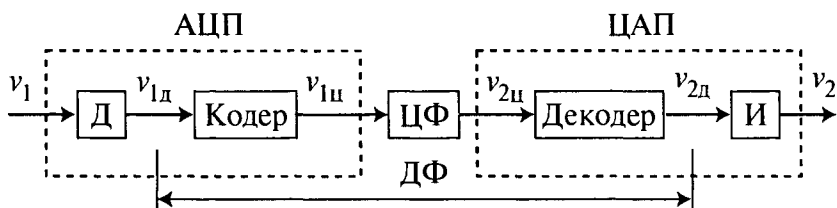


Рис. 8.1

кодер — устройство преобразования дискретных сигналов $v_{1д}$ в цифровые $v_{1ц}$;

ЦФ — *цифровой фильтр* — алгоритм (программа) для цифровых вычислительных машин или сигнальных процессоров;

декодер — устройство преобразования цифровых сигналов $v_{2ц}$ в дискретные $v_{2д}$;

И — *интегратор* (сглаживающий фильтр) — устройство преобразования дискретных сигналов $v_{2д}$ в аналоговые v_2 ;

АЦП и *ЦАП* — *аналого-цифровой* и *цифроаналоговый преобразователи*;

ДФ — *дискретный фильтр*, как частный случай *ЦФ* при использовании фильтрации на уровне дискретных сигналов.

В реальных *ЦФ* отдельные устройства, приведенные на рис. 8.1, могут отсутствовать или дополняться другими устройствами в зависимости от назначения *ЦФ*.

Чтобы составить представление о методах синтеза *ЦФ* в частотной или временной области, достаточно рассмотреть эти методы применительно к *ДФ*.

Процесс преобразования аналоговых (непрерывных) сигналов v_1 в цифровые $v_{1ц}$ осуществляется в два этапа:

1) *дискретизация по времени* в дискретизаторе непрерывного сигнала v_1 путем «стробирования» значений непрерывного сигнала короткими периодическими импульсами-стробами $\delta(kT)$ с периодом $T = 1/f_d$, где f_d — частота дискретизации, выбор которой определяется теоремой Котельникова; полученную при этом последовательность дискретных отсчетов называют *дискретным сигналом* $v_{1д}$:

$$v_{1д} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(kT) \delta(t - kT), \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

В безразмерной форме (при $n = t/T$):

$$v_1(n) = \sum_{k=0}^{N-1} v_1(k) \delta(n - k), \quad (8.2)$$

где N — конечное число отсчетов на интервале длительности сигнала v_1 .

2) *квантование по уровню* (величине) дискретных отсчетов $v_1(n)$ в АЦП и замена (кодирование) их соответствующими цифровыми кодами (обычно двоичными номерами) этих уровней; полученную при этом последовательность цифровых кодов называют **цифровым сигналом** $v_{1ц}$.

При дискретизации по времени решают две основные проблемы:

1) *выбор частоты дискретизации* f_d по противоречивым требованиям:

- к быстрдействию ЦФ (обработка очередного отсчета должна заканчиваться до момента поступления следующего, т.е. частота дискретизации должна быть *невысокой*);
- к минимальным потерям информации о форме непрерывного сигнала v_1 (частота дискретизации должна быть как можно более *высокой*);

2) *выбор формы сигналов-стробов* $\delta(kT)$ по противоречивым требованиям:

- форма стробирующих сигналов должна быть близка к форме единичных импульсов с *бесконечным* спектром;
- ширина спектра должна быть сравнима с *ограниченной* шириной спектра непрерывного сигнала v_1 .

Указанные проблемы решаются на основе теоремы и ряда Котельникова.

8.1.2. Теорема дискретизации (теорема и ряд Котельникова)

При $N \rightarrow \infty$ дискретный сигнал (8.2) представляет собой свертку сигналов $v_1(t)$ и $\delta(kT)$, спектр которой, согласно теореме о свертке [см. (4.45)], равен произведению спектров «свертываемых» сигналов.

Рассмотрим свертку *непрерывного сигнала* v_1 с длительностью τ , имеющего спектр $F_1(f)$ с граничной частотой спектра f_Γ , и *бесконечной периодической последовательности единичных импульсов* $\delta(kT)$ с периодом T , имеющих бесконечный дискретный спектр $F_\delta(f)$ (см. 4.5.2) (рис. 8.2).

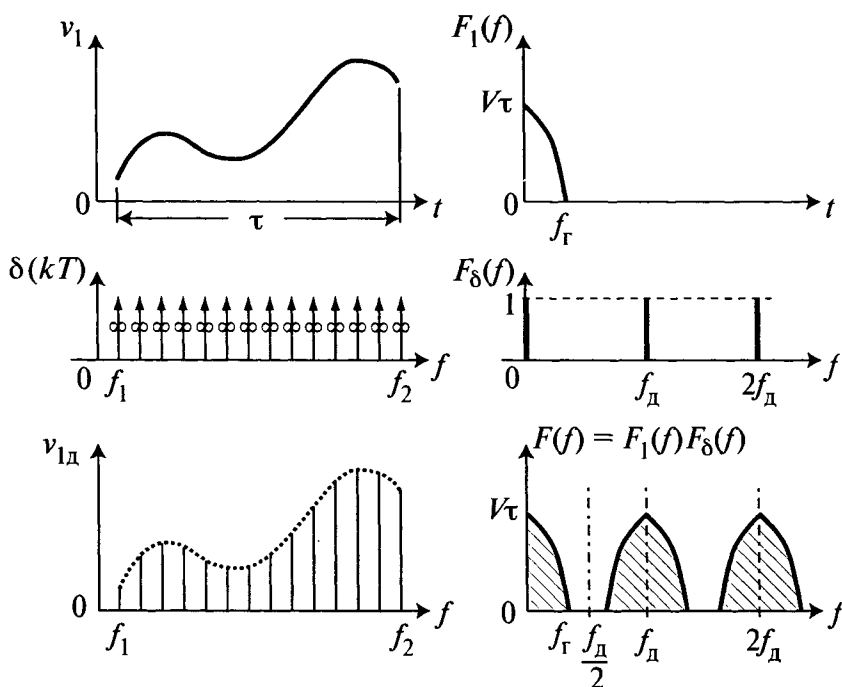


Рис. 8.2

Спектр свертки $F(f)$ носит «гребенчатый» характер и имеет высокую избыточность, так как для восстановления из свертки исходного сигнала v_1 достаточно иметь только один из «гребней» спектра. Поскольку безошибочное восстановление сигнала из свертки возможно,

если в ее спектре составляющие соседних «гребней» не перекрываются, то для такой свертки должно выполняться условие $f_{\Gamma} \leq \frac{f_{\Delta}}{2}$, или частота дискретизации $f_{\Delta} \geq 2f_{\Gamma}$.

Эта особенность процесса дискретизации отмечена **теоремой Котельникова**: *Функция с ограниченным спектром (частотой f_{Γ}) полностью определяется последовательностью своих отсчетов, взятых через интервал $T = \frac{1}{f_{\Delta}} \leq \frac{1}{2f_{\Gamma}}$.*

Ограничение спектра периодической последовательности единичных импульсов $\delta(kT)$ частотой f_c (например, путем пропускания их через идеальный фильтр нижних частот (ИФНЧ) с частотой среза f_c) приводит к изменению формы импульсов-стробов. Для определения их формы рассмотрим прохождение через ИФНЧ с частотой среза f_c единичного импульса $\delta(t)$ (рис. 8.3).

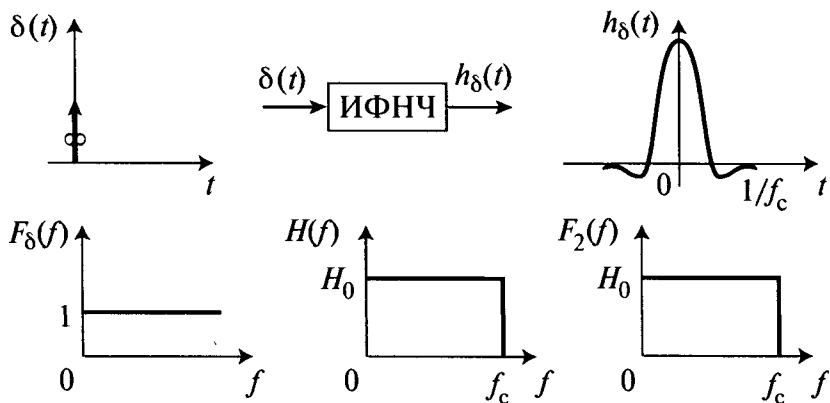


Рис. 8.3

Используя обратное преобразование Фурье (4.40), получим

$$\begin{aligned}
 h_{\delta}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_0 \exp(j\omega t) d\omega = \\
 &= \frac{H_0}{\pi t} \frac{\exp(j\omega_c t) - \exp(-j\omega_c t)}{2j} \frac{2\pi f_c}{\omega_c} = 2f_c H_0 \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ограничение спектра единичных импульсов-стробов приводит к форме импульсов, описываемых функцией вида $\frac{\sin x}{x}$, которая используется при представлении дискретных сигналов **рядом Котельникова**:

$$v_{1д} = \sum_{k=0}^{\infty} v_1 \frac{\sin[\omega_c(t - kT)]}{\omega_c(t - kT)}. \quad (8.3)$$

Ряд Котельникова устраняет вторую проблему дискретизации (см. 8.1.1) и поэтому широко используется на практике для представления реальных дискретных сигналов.

8.1.3. Функции передачи дискретных фильтров

Для аналоговых сигналов и фильтров взаимосвязь воздействия и отклика описывается:

1) во временной области *интегралом Дюамеля* (4.29), который при нулевых начальных условиях имеет

вид $v_2 = \int_0^t v_1 h_\delta(t - \tau) d\tau$, т.е. отклик является сверткой воздействия v_1 и импульсной характеристики аналогового фильтра $h_\delta(t)$;

2) в частотной области *операторной передаточной функцией*

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i s^i}{\sum_{i=0}^n b_i s^i} = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}.$$

Аналогично для дискретных сигналов и фильтров взаимосвязь воздействия и отклика описывается:

1) во временной области *дискретной сверткой* дискретного воздействия $v_{1д}$ и дискретной импульсной характеристики дискретного фильтра $h_\delta(kT)$:

$$v_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) h_{\delta}(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\delta}(k) v_1(n-k). \quad (8.4)$$

Дискретная импульсная характеристика дискретного фильтра может быть получена путем дискретизации импульсной характеристики соответствующего аналогового фильтра. При конечном числе отсчетов N дискретная свертка называется *круговой*;

2) в частотной области *операторной передаточной функцией* дискретного фильтра

$$H_{\text{д}}(s) = \frac{F_{2\text{д}}(s)}{F_{1\text{д}}(s)}. \quad (8.5)$$

Для определения изображений $F_{\text{д}}(s)$ дискретных воздействий и отклика применим прямое преобразование Лапласа (4.5) к дискретному сигналу (8.1):

$$\begin{aligned} F_{\text{д}}(s) &= \int_0^{\infty} v_{\text{д}}(n) \exp(-st) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-st) \left[\sum_{k=0}^{\infty} v(kT) \delta(t - kT) \right] dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v(kT) \int_0^{\infty} \exp(-st) \delta(t - kT) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v(kT) \exp(-s kT). \end{aligned} \quad (8.6)$$

При конечном числе отсчетов N согласно (8.5) получим

$$H_{\text{д}}(s) = \frac{F_{2\text{д}}(s)}{F_{1\text{д}}(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} v_2(kT) \exp(-s kT)}{\sum_{k=0}^{N-1} v_1(kT) \exp(-s kT)}. \quad (8.7)$$

На практике функции (8.7) представляют в виде отношения двух полиномов:

$$H_{\text{д}}(s) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i \exp(-s iT)}{\sum_{i=0}^n b_i \exp(-s iT)}, \quad (8.8)$$

где коэффициенты a_i и b_i определяют структуру дискретного фильтра.

Выражение (8.8) является трансцендентным и неудобным для анализа.

При анализе и синтезе дискретных фильтров в целях упрощения используют **z-преобразование**, состоящее в отображении комплексной переменной $\underline{s} = \sigma + j\omega$ в другую комплексную переменную $\underline{z} = x + jy$ по правилу

$$\underline{z} = \exp(sT) = \exp(\sigma T) \exp(j\omega T) = x + jy,$$

где $x = \exp(\sigma T) \cos(\omega T)$; $y = \exp(\sigma T) \sin(\omega T)$.

При преобразовании \underline{s} в \underline{z} мнимая ось $j\omega$ преобразуется в *окружность* с радиусом $R = \exp(\sigma T)$, левая полуплоскость s — во *внутреннюю* область, а правая — во *внешнюю* область этой окружности.

Тогда трансцендентное выражение (8.8) преобразуется в алгебраическое, при этом передаточную функцию называют **системной функцией**:

$$H_{\text{д}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} = \frac{a_m z^{-m} + a_{m-1} z^{-(m-1)} + \dots + a_0}{b_n z^{-n} + b_{n-1} z^{-(n-1)} + \dots + b_0}. \quad (8.9)$$

Общий вид z -преобразования:

$$F_{\text{д}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(kT) z^{-k} \quad \text{— прямое } z\text{-преобразование;} \quad (8.10)$$

$$v(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=R} F_{\text{д}}(z) z^{k-1} dz \quad \text{— обратное } z\text{-преобразование.}$$

Заметим, что z -преобразование является обобщением преобразований Лапласа.

Таким образом, между характеристиками аналоговых и дискретных фильтров существует аналогия, что позволяет использовать теорию аналоговых фильтров для анализа и синтеза дискретных фильтров с учетом особенностей дискретизации.

Пример. Рассмотрим анализ дискретного фильтра. Пусть задана системная функция $H_{\text{д}}(z) = 1 + z^{-1}$.

Тогда комплексная передаточная функция и АЧХ соответственно будут равны:

$$H_{\text{д}}(j\omega) = 1 + \exp(-j\omega T) = 1 + \cos(\omega T) - j \sin(\omega T);$$

$$H_{\text{д}}(\omega) = \sqrt{2 + 2 \cos(\omega T)} = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2(\omega T/2)} = |2 \cos(\omega T/2)|.$$

График АЧХ представлен на рис. 8.4, т.е. АЧХ дискретного фильтра является «гребенчатой».

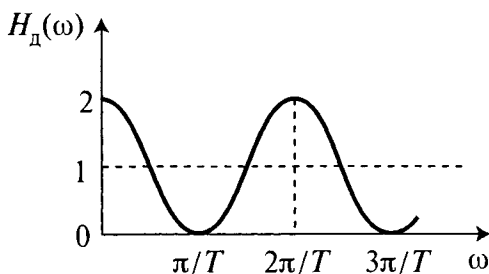


Рис. 8.4

8.2. Синтез дискретных фильтров с заданными характеристиками

8.2.1. Основы синтеза дискретных фильтров

Условия физической реализации устойчивых дискретных фильтров (ДФ) такие же, как у аналоговых фильтров: «полюса» операторной передаточной функции должны располагаться в левой полуплоскости переменной s , что для системной функции $H(z)$ выражается в требовании расположения ее «полюсов» внутри окружности радиуса R в плоскости переменной z .

Как и в случае аналоговых фильтров задача синтеза дискретных или цифровых фильтров включает следующие этапы:

а) аппроксимация временных (импульсной) или частотных (системной функции) характеристик фильтра заведомо реализуемой функцией;

б) последующая реализация этих характеристик с помощью функциональных элементов аналоговой вычислительной техники (элементы задержки, сумматоры, усилители и др.) или с помощью алгоритмов (программ) цифровой вычислительной техники.

Наиболее широко распространен синтез ДФ по их импульсной характеристике, которую получают путем дискретизации импульсной характеристики аналогового фильтра. При этом различают *конечную* (число отсчетов конечно) и *бесконечную* (число отсчетов бесконечно) импульсные характеристики дискретного фильтра.

Для ДФ с монотонными импульсными характеристиками (фазовые корректоры, согласованные фильтры и т.п.) получают *конечную импульсную характеристику* (КИХ), которую аналогично (4.46) с помощью прямого z -преобразования преобразуют в системную функцию $H(z)$, удобную для реализации функциональными элементами АВТ.

Для ДФ с немонотонными импульсными характеристиками (полосовые, режекторные фильтры и т.п.)

получают практически *бесконечную импульсную характеристику* (БИХ), которая приводит к бесконечно большому порядку фильтра, что нереализуемо. Поэтому для этих фильтров аппроксимированную передаточную характеристику $H(s)$ методом дробно-рационального (билинейного) преобразования преобразуют в системную функцию $H(z)$.

Взаимосвязь выходного и входного сигналов $y(n)$ и $x(n)$ часто определяют в виде разностного уравнения:

а) для ДФ с КИХ

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k);$$

б) для ДФ с БИХ

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-k). \quad (8.11)$$

Дискретные фильтры с КИХ обеспечивают линейность фазовых характеристик и устойчивость (нет обратной связи).

Пример. Рассмотрим синтез дискретного нормированного ФНЧ по аналоговой КИХ с нормированной частотой среза $\Omega_c = 1$, т.е. постоянная времени $\tau = 1/\Omega_c = 1$. Тогда $h_\delta(t) = \exp(-t)$.

Если выбрать интервал дискретизации $T = \tau = 1$, то дискретные отсчеты импульсной характеристики (рис. 8.5) будут соответственно равны: $h_\delta(0) = 1$; $h_\delta(T) = 0,367$; $h_\delta(2T) = 0,135$; $h_\delta(3T) = 0,05$ и т.д.

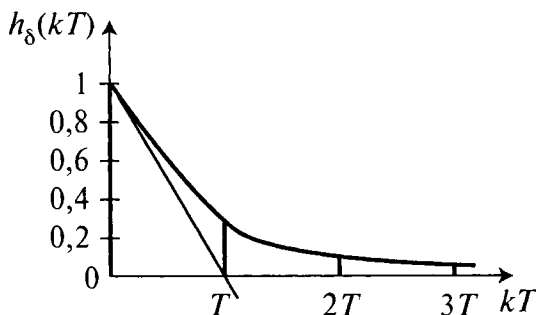


Рис. 8.5

С точностью до 5% такую импульсную характеристику можно аппроксимировать последовательностью отсчетов:

$$h_8(kT) = \{1; 0,367; 0,135; 0,05\}.$$

Применяя к полученной дискретной импульсной характеристике z -преобразование (8.10), получим системную функцию

$$H(z) = 1 + 0,367 z^{-1} + 0,135 z^{-2} + 0,05 z^{-3}.$$

Таким образом, коэффициенты системной функции $H(z)$ есть отсчеты импульсной характеристики $h_8(kT)$.

Общий вид этой функции:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^3 a_k z^{-k}, \quad (8.12)$$

где $Y(z)$ и $X(z)$ — выходной и входной дискретные сигналы.

В нашем примере

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z) \left[1 + 0,367 z^{-1} + 0,135 z^{-2} + 0,05 z^{-3} \right].$$

Согласно теореме о сдвиге сигнала (4.42) умножению спектральной плотности (функции) сигнала на $\exp(-j\omega T)$ соответствует временной сдвиг сигнала вправо (задержка) на время T . Следовательно, множителю z^{-1} соответствует задержка входного сигнала на интервал дискретизации T (время такта), а множителю z^{-k} — задержка сигнала на k тактов. Тогда схема реализации системной функции третьего порядка примет вид, приведенный на рис. 8.6.

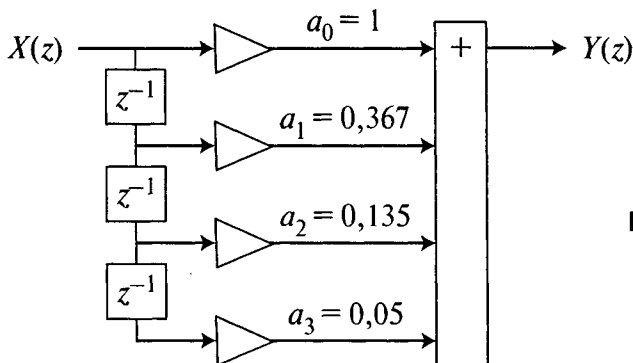


Рис. 8.6

В этой схеме используется три элемента задержки (фильтр третьего порядка), четыре усилителя с коэффициентами передачи a_0, a_1, a_2, a_3 и один сумматор. Такая схема называется *нерекурсивной* (без обратных связей).

Таким образом, КИХ *нерекурсивного* ДФ задается конечной последовательностью отсчетов, а системная функция *нерекурсивного* ДФ порядка m имеет вид (8.12).

Для фильтров с высокой крутизной и колебательным характером АЧХ (порядок ≥ 2), имеющим БИХ, непосредственное преобразование операторной передаточной функции $H(s)$ в системную функцию $H(z)$ путем замены $s = \frac{\ln z}{T}$ приводит к нереализуемой системной функции.

Поэтому при синтезе *рекурсивных* ФНЧ и ФВЧ с частотой среза f_c используют *билинейное (дробно-рациональное) преобразование* вида

$$s = m \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (8.13)$$

полученное в результате разложения $\frac{\ln z}{T}$ в ряд Тейлора.

Постоянный множитель m определяется выражением

$$m = \operatorname{ctg}(\pi f_c T). \quad (8.14)$$

При синтезе дискретных ПФ используют расчетные соотношения, таблицы и графики, полученные для аналоговых полосовых фильтров.

Пример. Рассмотрим синтез дискретного ФНЧ второго порядка по аналоговому прототипу с частотой среза ПП $f_c = 1$ кГц и операторной передаточной функцией

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4s + 1}.$$

По теореме Котельникова интервал дискретизации $T \leq \frac{1}{2f_c} = 0,5$ мс. Выберем $f_d = 8$ кГц, т.е. интервал

дискретизации $T = 1/f_d = 0,125$ мс, а величина $m = = \operatorname{ctg}(\pi \cdot 10^3 \cdot 0,125 \cdot 10^{-3}) = 2,414$. Тогда, используя (8.13), получим

$$H(z) = \frac{1}{\left(m \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 1,4m \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z^2 + 1,4z + 1}{10,2z^2 - 9,65z + 3,45} = = \frac{0,098 + 0,196z^{-1} + 0,098z^{-2}}{1 - 0,946z^{-1} + 0,338z^{-2}}.$$

Общий вид этой функции:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (8.15)$$

После алгебраических преобразований получим выходной дискретный сигнал:

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})X(z) + b_1 z^{-1}Y(z) + b_2 z^{-2}Y(z).$$

Тогда реализация системной функции (8.15) примет вид, приведенный на рис. 8.7.

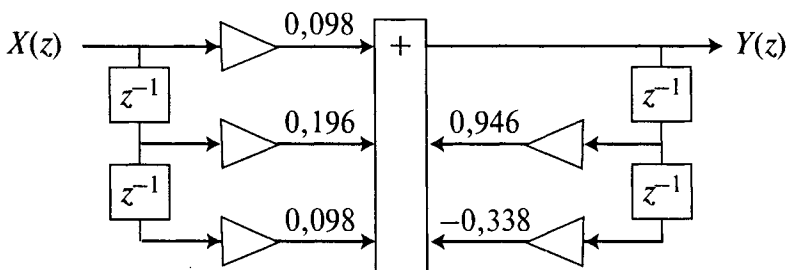


Рис. 8.7

Полученная схема является *рекурсивной* (с обратной связью) и при неправильном выборе коэффициентов может быть неустойчивой.

8.2.2. Способы реализации системных функций

Реализация ДФ как и в случае с аналоговыми фильтрами основывается на реализации системной функции $H(z)$ после ее декомпозиции элементами АВТ.

1. Системная функция рекурсивного ДФ может быть представлена в виде произведения системных функций первого

и второго порядков $H_1(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$ и второго порядков

$H_2(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$, т.е. реализована в виде каскадного соединения дискретных билинов и биквадов (рис. 8.8).

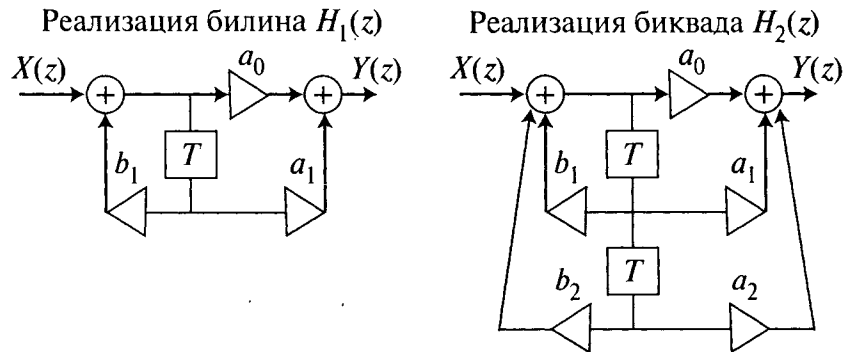


Рис. 8.8

2. Наиболее общее выражение системной функции рекурсивного ДФ порядка n

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^n b_k z^{-k}} \quad (8.16)$$

может быть представлено в виде произведения

$$H(z) = P(z) H_n(z),$$

где $P(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n b_k z^{-k}}$ — функция обратной связи по-

рядка n ; $H_H(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^{-k}$ — системная функция
 нерекурсивного фильтра порядка m .

Тогда структурная схема реализации системной функции рекурсивного фильтра является каскадной (рис. 8.9). Функциональная схема такой реализации приведена на рис. 8.10.

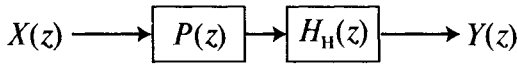


Рис. 8.9

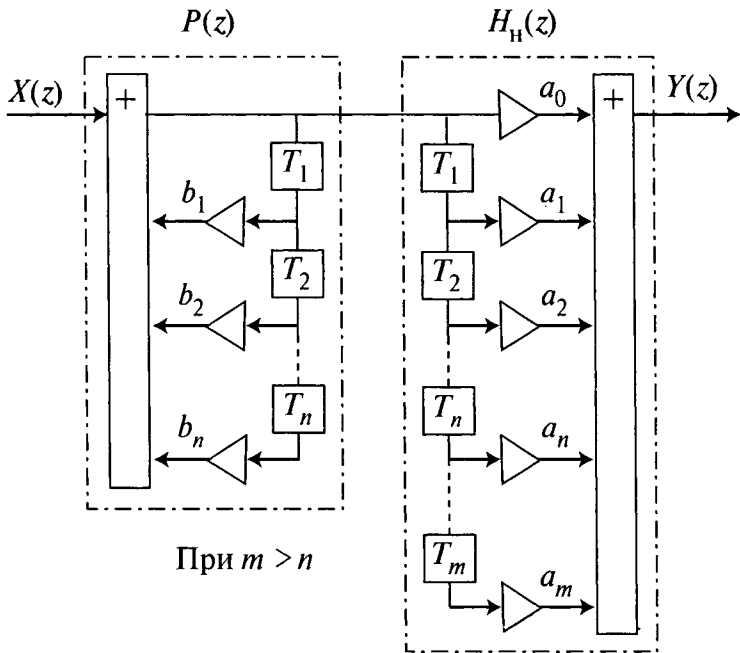


Рис. 8.10

В такой схеме ДФ определенная часть элементов задержки (N или M) является избыточной и может быть удалена путем совмещения двух элементов задержки в один, что приводит к канонической схеме ДФ (рис. 8.11).

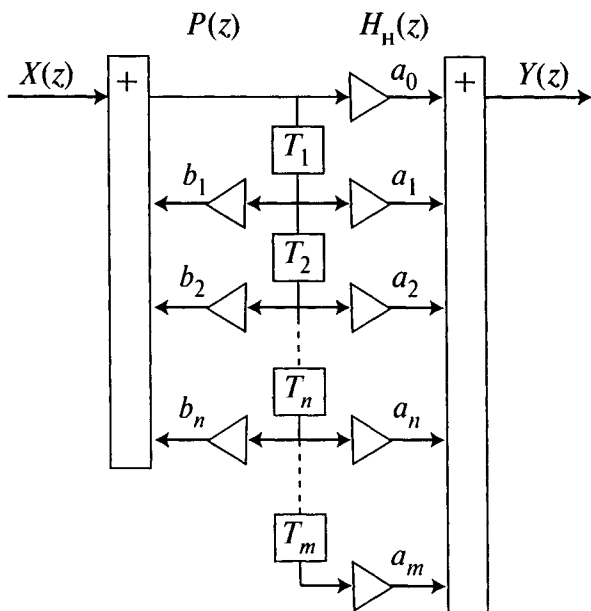


Рис. 8.11

8.3. Спектральный анализ дискретных сигналов и фильтров

8.3.1. Дискретное преобразование Фурье

Анализ дискретных фильтров (и других дискретных цепей) возможен с использованием дискретной свертки (8.4)

$$v_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) h_{\delta}(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\delta}(k) v_1(n-k).$$

Как и в случае с аналоговыми сигналами (АС) при использовании дискретных сигналов (ДС) также возможен спектральный анализ прохождения ДС через дискретные

цепи, для чего необходимо знать дискретные спектры периодических и непериодических ДС.

В 8.1.2 рассмотрен пример спектра непериодического (одиночного) ДС и показано, что он является «гребенчатым» и сплошным (см. рис. 8.2).

Рассмотрим теперь **спектральное представление периодических ДС**. Для начала напомним спектральное представление периодических АС. Согласно (4.36) спектральные составляющие A_i дискретного амплитудно-частотного спектра (АЧС) АС определяются выражением

$A_i = \frac{2}{T} F(i\Omega)$, где $F(i\Omega)$ — модуль комплексной спектральной функции периодического АС.

Например, АЧС $A(i\Omega)$ периодического АС $v(t)$ треугольной формы с периодом T_c приведен на рис. 8.12.

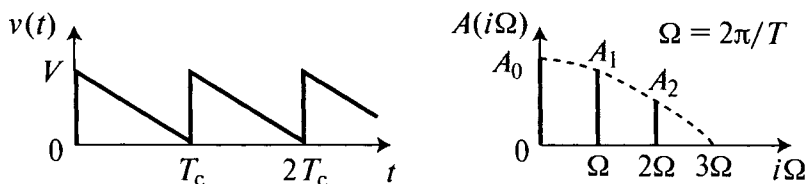


Рис. 8.12

При дискретизации этого периодического АС $v(t)$ с периодом T_c и граничной частотой спектра $\Omega_r = \frac{2\pi}{T_c} = 3\Omega$ частота дискретизации АС Ω_d , согласно теореме Котельникова, должна быть $\Omega_d \geq 2\Omega_r = 6\Omega$, т.е. получим наибольший интервал дискретизации $T = \frac{2\pi}{\Omega_d} = \frac{2\pi}{6\Omega} = \frac{T_c}{6}$.

Таким образом, дискретный сигнал $v(kT)$ представляет собой периодическую последовательность N отсчетов (с интервалом T) за период периодического АС: $T_c = NT$.

Согласно (8.6) АЧС полученного периодического ДС будет «гребенчатым» и дискретным с основной частотой (интервалом между гармониками) $\Omega = \frac{2\pi}{NT}$ и частотой

дискретизации (частотным интервалом между вершинами «гребней»): $\Omega_{\text{д}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_c} N = N\Omega$.

В нашем примере $N=6$, а дискретный периодический сигнал $v(kT)$ и его АЧС $A(i\Omega)$ имеют вид, приведенный на рис. 8.13.

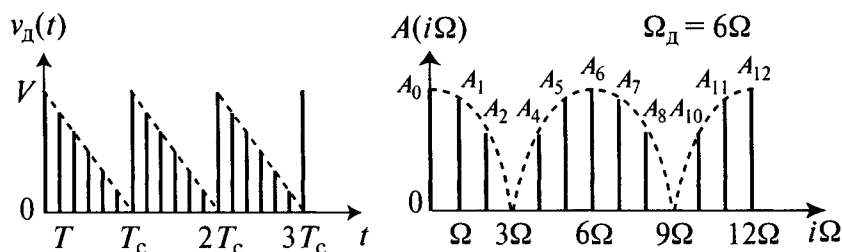


Рис. 8.13

Если для периодического АС $v(t)$ существуют прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\underline{A}(i\Omega) = \frac{2}{T_c} \int_0^{T_c} v(t) \exp(-ji\Omega t) dt; \quad (8.17)$$

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(i\Omega) \exp(ji\Omega t), \quad (8.18)$$

то для периодического ДС $v(kT)$ также существуют взаимобратные дискретные преобразования Фурье (ДПФ):

- **прямое ДПФ**

$$\underline{A}_{\text{д}}(i\Omega) = \frac{2}{NT} \sum_{i=0}^{N-1} v(kT) \exp(-ji\Omega kT); \quad (8.19)$$

- **обратное ДПФ**

$$v(kT) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \underline{A}_{\text{д}}(i\Omega) \exp(ji\Omega kT), \quad (8.20)$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{NT}$ — основная частота (бин) ДПФ.

Для ДПФ справедливы свойства линейности, теоремы о временном сдвиге сигнала, частотном сдвиге спектра и др.

Для непериодических (одиночных) ДС, имеющих N отсчетов, определенных только в пределах от 0 до T_c , аналогично (4.39) и (4.40) ДПФ имеют вид:

$$A_k = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \exp(-jik\Omega T) = \sum_{i=0}^{N-1} v_i \exp\left(-jik \frac{2\pi}{N}\right); \quad (8.21)$$

$$v_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A_i \exp(jik\Omega T) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} A_i \exp\left(jik \frac{2\pi}{N}\right). \quad (8.22)$$

Дискретные экспоненты $\exp(\pm jk\Omega T) = \exp\left(\pm jk \frac{2\pi}{N}\right)$

определяют порядок использования компонент v_i или A_i и называются *поворачивающими множителями* степени k :

$$F_N^k = \exp\left(\pm jk \frac{2\pi}{N}\right). \quad (8.23)$$

Например, дискретная экспонента (при $N = 2$ и $k = 0, 1, 2, 3, \dots$) вида

$$F_2^k = \exp(-jk\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

является указателем только на суммирование (1) или вычитание (-1) соответствующих компонент v_i или A_i без изменения их значений, т.е. схема такого прямого ДПФ имеет вид, приведенный на рис. 8.14.

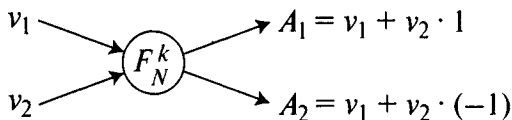


Рис. 8.14

Для расчета составляющих спектра дискретных сигналов по ДПФ требуется выполнить $2N^2$ операций (N^2 операций умножения плюс N^2 операций сложения), что при больших N становится трудоемкой задачей.

8.3.2. Быстрое преобразование Фурье

Для ускоренного получения спектров ДС применяют алгоритмы **быстрого преобразования Фурье** (БПФ), которые требуют, чтобы величина N была степенью числа 2, т.е. $N = 2^k$. Если N не является степенью числа 2, то целесообразно дополнить это число нулевыми отсчетами до ближайшей степени числа 2.

Поскольку в этом случае число отсчетов сигнала N четное, то ДПФ можно применить отдельно к $N/2$ четным номерам отсчетов и отдельно к $N/2$ нечетным номерам отсчетов. Аналогично каждая из полученных половин отсчетов также может быть разделена на две половины и так далее до получения всего двух отсчетов, для которых используется двухточечное ДПФ.

При БПФ общее число операций $M = 1,5N \log_2 N$.

Например, при $N = 8$ для вычисления спектра при ДПФ требуется $2 \cdot 8^2 = 128$ операций умножения и сложения (вычитания), а при БПФ — всего $1,5 \cdot 8 \cdot 3 = 36$ этих операций, т.е. в $128/36 = 3,56$ раза меньше. При $N > 10^3$ БПФ позволяет снизить число операций более чем на 2 порядка, т.е. с ростом N эффективность БПФ растет.

Схема любого двухточечного преобразования (операция «бабочка») имеет вид, приведенный на рис. 8.15.

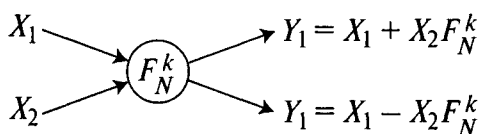


Рис. 8.15

Например, при $N = 8$ ($k = 3$):

$$F_8^0 = 1;$$

$$F_8^1 = \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$F_8^2 = \exp\left(-j \cdot 2 \frac{\pi}{4}\right) = -j;$$

$$F_8^3 = \exp\left(-j \cdot 3 \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Структурная схема алгоритма БПФ при $N = 8$ содержит три этапа преобразований (рис. 8.16).

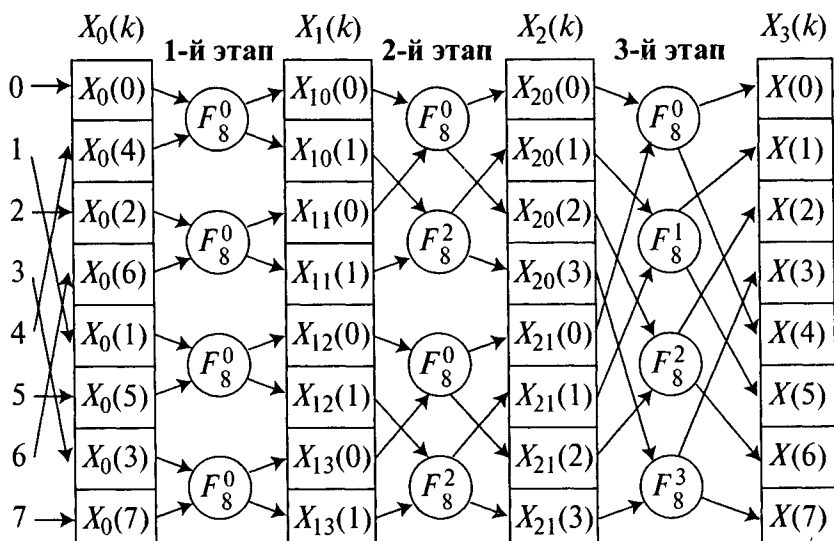


Рис. 8.16

Пример. Рассмотрим БПФ. Пусть имеются следующие отсчеты дискретного сигнала $X(kT)$:

$$[X(0), X(T), X(2T), X(3T), X(4T), X(5T), X(6T), X(7T)] = [3; 5; -2; -2; -9; -3; 0; 3].$$

Тогда получим:

после ввода входного сигнала

$$[3; -9; -2; 0; 5; -3; -2; 3];$$

на 1-м этапе

$$[-6; 12; -2; -2; 2, 8; 1; -5];$$

на 2-м этапе

$$[-8; 12 + j \cdot 2; -4; 12 - j \cdot 2; 3; 8 + j \cdot 5; 1; 8 - j \cdot 5].$$

После трех этапов преобразования (убедиться самостоятельно) получим составляющие дискретного амплитудно-частотного спектра:

$$A(i\Omega) = [-5; 21,1 - j \cdot 0,1; -4 - j; 2,9 - j \cdot 4,1; -11; 2,9 + j \cdot 4,1; -4 + j; 21,1 + j \cdot 0,1].$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Проблемы дискретизации аналоговых сигналов во времени.
2. Сущность теоремы Котельникова.
3. Временные и частотные функции цифровых фильтров.
4. Понятие «системная функция».
5. Отличие рекурсивного и нерекурсивного фильтров.
6. Особенности спектра периодических дискретных сигналов.
7. Сущность быстрого преобразования Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перспективы развития теории электрических цепей связаны с развитием теории и техники активных слаботочных RC -цепей (преобразователей сопротивлений, фильтров и др.), а также цифровых микропроцессоров обработки сигналов (сигнальных процессоров).

Совершенствование современных вычислительных систем и рост потребностей в цифровой обработке сигналов привели к созданию малогабаритных и надежных **цифровых процессоров обработки сигналов (ЦПОС)**.

Первый однокристалльный 16-разрядный ЦПОС с фиксированной точкой ADSP-2100 появился в 1986 г. и имел архитектуру, приспособленную к алгоритмам цифровой обработки, т.е. содержал три независимых узла:

- *арифметико-логическое устройство* для выполнения стандартных арифметических и логических операций над двоичными кодами (словами);
- *умножитель-аккумулятор* для выполнения операций умножения с суммированием и вычитанием;
- *устройство сдвига* для выполнения операций арифметического и логического сдвига, нормализации мантисс и др.

Позднее появились 32-разрядные ЦПОС с плавающей точкой.

Цифровые процессоры обеспечивают универсальную обработку цифровых сигналов с высокой точностью, достоверностью и оперативностью. Такая обработка постепенно вытесняет обработку аналоговых и дискретных сигналов.

В настоящее время ЦПОС находят широкое применение в системах управления, в системах сжатия и обработки речевой и другой аудиоинформации, в сотовой телефонии, в модемах систем телекоммуникаций, в цифровом телевидении, в медицинской аппаратуре и многих других системах обработки аналоговой информации цифровыми методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакалов В.П., Воробуенко П.П., Крук Б.И.* Теория электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1998. — 444 с.
2. *Белецкий А.Ф.* Теория линейных электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1986. — 544 с.
3. *Воробуенко П.П.* Теория линейных электрических цепей: Сб. задач и упражнений. — М.: Радио и связь, 1989. — 328 с.
4. *Добротворский И.Н.* Теория электрических цепей. — М.: Радио и связь, 1989. — 472 с.
5. *Запасный А.И.* Основы теории цепей: Лабораторный практикум на ПЭВМ. — Ставрополь, 2004. — 74 с.
6. *Фриск В.В.* Основы теории цепей. — М.: РадиоСофт, 2002. — 289 с.
7. *Фриск В.В.* Основы теории цепей: Лабораторный практикум на персональном компьютере. — М.: СОЛОН-Пресс, 2002. — 191 с.
8. *Шебес М.Р., Каблукова М.В.* Задачник по теории линейных электрических цепей: Учеб. пособие для вузов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Высшая школа, 1990. — 544 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Список сокращений	3
ВВЕДЕНИЕ	6
Тема 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	14
1.1. Компоненты и элементы электрических цепей	14
1.1.1. Идеализированные элементы электрических цепей	14
1.1.2. Модель и топология электрической цепи, их формализация	20
1.2. Основные законы и эквивалентные преобразования электрических цепей	22
1.2.1. Законы Кирхгофа и Ома в электрических цепях	22
1.2.2. Правила делителя напряжения и делителя тока	25
1.2.3. Эквивалентные преобразования электрических цепей	26
1.3. Методы анализа линейных электрических цепей	29
1.3.1. Метод наложения	29
1.3.2. Метод эквивалентного источника	32
1.3.3. Метод уравнений Кирхгофа	35
1.4. Алгоритмические методы анализа линейных электрических цепей	39
1.4.1. Метод контурных токов	39
1.4.2. Метод узловых напряжений (потенциалов)	43
1.5. Методы анализа нелинейных электрических цепей	47
1.5.1. Виды, характеристики и параметры нелинейных элементов	47

1.5.2. Графические методы анализа нелинейных ЭЦ	49
1.5.3. Аналитические методы анализа нелинейных ЭЦ	51

Тема 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ 54

2.1. Гармоническое воздействие на идеализированные элементы	54
2.1.1. Формы представления гармонического воздействия	54
2.1.2. Идеализированные элементы при гармоническом воздействии	57
2.2. Символический анализ простейших линейных электрических цепей	60
2.2.1. Комплексные сопротивления и проводимости ЭЦ	60
2.2.2. Треугольники сопротивлений (проводимостей) и векторные диаграммы простейших линейных двухполюсников	62
2.2.3. Резонанс напряжений и токов в ЭЦ	66
2.3. Энергетический анализ линейных электрических цепей	69
2.3.1. Виды мощностей в электрических цепях и их баланс	69
2.3.2. Согласование источника электрической энергии с нагрузкой	72
2.4. Индуктивно связанные электрические цепи	74
2.4.1. Параметры индуктивной связи	74
2.4.2. Анализ индуктивно связанных цепей	76
2.4.3. Вариометры и трансформаторы	79

Тема 3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ 84

3.1. Частотные характеристики апериодических цепей	84
3.1.1. Частотные характеристики апериодических цепей первого порядка (билинов)	84

3.1.2. Частотные характеристики аperiодических цепей второго порядка (биквадов)	90
3.2. Частотные характеристики последовательного колебательного контура	93
3.2.1. Основные параметры последовательного колебательного контура, влияние сопротивления источника и нагрузки	93
3.2.2. Входные частотные характеристики ПСК	96
3.2.3. Передаточные амплитудно-частотные характеристики ПСК	99
3.3. Частотные характеристики параллельных колебательных контуров	101
3.3.1. Виды и основные параметры параллельных колебательных контуров, влияние сопротивления источника и нагрузки	101
3.3.2. Входные частотные характеристики ПРК	103
3.3.3. Передаточные амплитудно-частотные характеристики ПРК	105
3.4. Частотные характеристики связанных колебательных контуров	107
3.4.1. Виды связанных колебательных контуров	107
3.4.2. Частотные свойства СКК	109
3.4.3. Входные амплитудно-частотные характеристики СКК	112
3.5. Передаточные частотные характеристики связанных колебательных контуров	114
3.5.1. Виды настроек СКК	114
3.5.2. Передаточные амплитудно-частотные характеристики СКК	116
3.5.3. Энергопередача в СКК	120

Тема 4. РЕЖИМ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ	123
4.1. Классический метод анализа переходных процессов	123
4.1.1. Законы коммутации в электрических цепях	123
4.1.2. Алгоритм классического метода анализа переходных процессов	125
4.2. Операторный метод анализа переходных процессов	130
4.2.1. Преобразования Лапласа и их свойства	130
4.2.2. Операторные схемы замещения идеализированных элементов	132
4.2.3. Алгоритм операторного метода анализа переходных процессов	134
4.3. Временные характеристики электрических цепей	137
4.3.1. Единичные воздействия и отклики на них	137
4.3.2. Операторные передаточные и временные характеристики АПЦ-1 (билинов)	138
4.3.3. Временные характеристики АПЦ-2 (биквадов)	142
4.3.4. Временной метод анализа переходных процессов	145
4.4. Временные характеристики колебательных контуров	148
4.4.1. Временные характеристики последовательного контура	148
4.4.2. Временные характеристики параллельного контура	151
4.5. Спектральное представление периодических воздействий	154
4.5.1. Спектры произвольных периодических воздействий	154
4.5.2. Спектры периодической последовательности прямоугольных видеоимпульсов	158

4.6. Спектральный метод анализа переходных процессов	162
4.6.1. Преобразования Фурье и их свойства (теоремы о спектрах)	162
4.6.2. Спектры типовых воздействий	164
4.6.3. Алгоритм спектрального метода анализа переходных процессов	167

Тема 5. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

5.1. Первичные параметры четырехполюсников	169
5.1.1. Виды и основные характеристики четырехполюсников	169
5.1.2. Системы первичных параметров четырехполюсников	170
5.1.3. Составные четырехполюсники и их матричные параметры	174
5.1.4. Схемы замещения четырехполюсников и их А-параметры	177
5.2. Вторичные (характеристические) параметры четырехполюсников	179
5.2.1. Характеристическое сопротивление четырехполюсников	179
5.2.2. Характеристическая постоянная передачи четырехполюсников	181
5.3. Рабочие параметры четырехполюсников	185
5.3.1. Передаточные функции четырехполюсников	185
5.3.2. Вносимое и рабочее ослабления четырехполюсника	188
5.4. Длинные линии при гармоническом воздействии	192
5.4.1. Виды и первичные параметры длинных линий	192
5.4.2. Вторичные (характеристические) параметры длинных линий	194

5.5. Волновые режимы в длинных линиях	199
5.5.1. Режим бегущих волн	199
5.5.2. Режим стоячих волн	201
5.5.3. Режим смешанных волн	205
5.6. Согласование длинной линии с нагрузкой	207
5.6.1. Проблемы согласования в длинных линиях	207
5.6.2. Входное сопротивление нагруженного фидера	209
5.6.3. Согласование фидера с нагрузкой	211
5.7. Активные четырехполюсники	213
5.7.1. Критерии активности четырехполюсников	213
5.7.2. Односторонние управляемые источники и их реализация	214
5.7.3. Преобразователи сопротивлений	216
Тема 6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ	223
6.1. Активная линейная электрическая цепь с обратной связью	223
6.1.1. Операторная передаточная функция цепи с обратной связью	223
6.1.2. Виды обратных связей	224
6.1.3. Влияние обратной связи на параметры АЛЭЦ с ОС	227
6.2. Устойчивость активной цепи с внешней обратной связью	230
6.2.1. Критерии устойчивости Михайлова и Гурвица	230
6.2.2. Критерий устойчивости Найквиста	234
6.3. Автоколебательные цепи	238
6.3.1. Виды автогенераторов	238
6.3.2. Проблемы анализа автогенераторов	239
6.3.3. Негатронные автогенераторы	244

6.4. Автогенераторы с внешней обратной связью	247
6.4.1. Автогенераторы с узкополосной ПОС (LC-генераторы)	247
6.4.2. Автогенераторы с широкополосной ПОС (RC-генераторы)	251
Тема 7. АНАЛОГОВЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФИЛЬТРЫ	254
7.1. Общая характеристика аналоговых электрических фильтров	254
7.1.1. Назначение и виды электрических фильтров	254
7.1.2. Задача и проблемы синтеза электрических фильтров	257
7.1.3. Условия физической реализуемости характеристик ЭФ	258
7.2. Пассивные лестничные LC-фильтры	261
7.2.1. Виды пассивных лестничных LC-фильтров и условия фильтрации	261
7.2.2. Пассивные лестничные фильтры типа «k» ...	264
7.2.3. Пассивные лестничные фильтры типа «m» ...	266
7.3. Пассивные каскадные LC-фильтры	270
7.3.1. Мостовые фильтры	270
7.3.2. Амплитудные и фазовые корректоры	275
7.4. Аппроксимация характеристик электрических фильтров	276
7.4.1. Методы аппроксимации частотных характеристик	276
7.4.2. Аппроксимация частотных характеристик ФНЧ-прототипа	278
7.4.3. Частотные преобразования при синтезе фильтров	282
7.5. Синтез пассивных LC-фильтров	284
7.5.1. Реализация пассивных лестничных фильтров	284

7.5.2. Реализация пассивных каскадных фильтров	289
7.6. Реализация активных RC-фильтров	292
7.6.1. Методы реализации активных фильтров	292
7.6.2. Реализация активных лестничных фильтров	293
7.6.3. Реализация активных билинов и биквадов	296
7.6.4. Реализация биквадов на базе элементов аналоговой вычислительной техники	299
Тема 8. ДИСКРЕТНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ	303
8.1. Принципы дискретной и цифровой фильтрации	303
8.1.1. Общие сведения о дискретных и цифровых фильтрах	303
8.1.2. Теорема дискретизации (теорема и ряд Котельникова)	306
8.1.3. Функции передачи дискретных фильтров	308
8.2. Синтез дискретных фильтров с заданными характеристиками	312
8.2.1. Основы синтеза дискретных фильтров	312
8.2.2. Способы реализации системных функций	317
8.3. Спектральный анализ дискретных сигналов и фильтров	319
8.3.1. Дискретное преобразование Фурье	319
8.3.2. Быстрое преобразование Фурье	323
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	326
Список литературы	327

Учебное издание

Запасный Анатолий Иванович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Учебное пособие

Редактор *И.В. Мартынова*

Корректор *Н.Д. Фадеева*

Компьютерная верстка *Л.Д. Афанасьевой*

Оформление серии *А.И. Антонов*

Сдано в набор 25.03.2005. Подписано в печать 9.02.2006.
Формат 60х90/16. Бумага типографская. Гарнитура Newton.

Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 20,82.

Тираж 3 000 экз. Заказ № 3116.

Издательский Дом РИОР

127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в

Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12.

E-mail: info@rior.ru

<http://www.rior.ru>

Отдел «Книга—почтой»

(495) 363-42-60 (доб. 246, 247)

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Тульская типография».
300600, г. Тула, пр. Ленина, 109.